த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—422

சோதனைத் திட்ட அமைப்பு

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

பு. இரா. இராமகிருட்டிணன்,

புள்ளியியல் துணைப்பேராசிரியர்,

தஞ்சை மருத்துவக் கல்லூரி,

தஞ்சை.



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—February, 1973

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 422

DESIGN OF EXPERIMENTS

P. R. Ramakrishnan

PRICE Rs. 6-50

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by

Srinivasam Press of Jupiter Enterprises,
1, Smith Lane, Mount Road,
Madras-2.

அணிந்துரை

திரு இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி–உள்ளாட்சித் துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பன்னிரண்டாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள், கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'சோதனைத் திட்ட அமைப்பு'** என்ற இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **422** ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரி தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **457** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன இந்நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மானிய மொழியில், பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

1. அறிமுகம்

'ஆய்வாளர்களுக்கான புள்ளியியல் முறைகள்,' 'பரிசோதனைகளின் திட்ட அமைப்பு' என்ற நூல்களின் மூலம் பேராசிரியர் ஃபிசர் பரிசோதனைகளை நடத்துவதற்கான பல சிறந்த முறைகளை ஏற்படுத்து முன்னர், ஆய்வாளர்கள் பரிசோதனைத் திட்டங்களைப் பல ஒழுங்கு முறைகளைப் பின்பற்றி அமைத்து வந்தனர். *A, B, C, D* என்ற நான்கு வகை உரங்களின் சிறப்புகளை ஒப்பிடும் பரிசோதனை பின்வருமாறு நடத்தப்பட்டது. பரிசோதனைக்கான நிலம் நான்கு சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டது. ஒவ்வொரு உரமும் பயன் படுத்தப்பட வேண்டிய தடவைகள் நான்கு எனில், ஒவ்வொரு பகுதியும் நான்கு சிறு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டது. நான்கு வகை உரங்களும் கீழ்க் கண்டவாறு பயன் படுத்தப்பட்டன:

A	B	C	D
A	B	C	D
A	B	C	D
A	B	C	D

A	A	A	A	B	B	B	B	C	C	C	C	D	D	D	D

ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதி முழுமையிலும் ஒரே வகையைச் சேர்ந்த உரம் பயன் படுத்தப்பட்டது.

நான்கு வகை உரங்களில் ஒவ்வொன்றும் ஒரு தடவை ஒவ்வொரு பகுதியிலும் பயன்படுத்தப்பட்டவேண்டும் எனின், பரிசோதனைத் திட்டம் பின் வருமாறு அமைந்தது:

A	A	A	A
B	B	B	B
C	C	C	C
D	D	D	D

A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D

சில சமயங்களில் பரிசோதனைத் திட்டம் பின் வருமாறு அமைக்கப்பட்டது:

A	B	C	D	D	A	B	C	C	D	A	B	B	C	D	A

இவ்வாறு உரவகைகள் ஓர் ஒழுங்கு முறையில் நிலப்பகுதி களில் பயன் படுத்தப்பட்டு பரிசோதிக்கப்பட்டன. முன்பு பயன் படுத்தப்பட்டு வந்த ஒழுங்கு வரிசையில் அமைந்த பரிசோதனைத் திட்டங்கள் சிலவற்றை வால்டர் டி. ஃபெடரர் எழுதியுள்ள 'பரிசோதனைத் திட்டம்' என்ற நூலில் காணலாம்.

ஒழுங்கு முறையில் அமைக்கப்பட்ட பரிசோதனைத் திட்டத்தைக் கொண்டு A, B, C, D என்ற நான்கு வகை

உரங்களின் விளைவுகளை ஒப்பிட்டாராய சோதனை நடத்தப் படுவதாகக் கொள்வோம். நிலம் நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு பகுதியிலும் ஒவ்வொரு வகையைச் சேர்ந்த உரம் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. அந்த நான்கு பகுதிகளிலும் விளைந்த ஒரு குறிப்பிட்ட தானியத்தின் விளைச்சல் களைக்கொண்டு உரங்களின் விளைவுகள் ஒப்பிடப்படுகின்றன. A உரம் பயன்படுத்தப்பட்ட நிலப்பகுதியின் விளைச்சல் மற்ற உரங்கள் பயன்படுத்தப்பட்ட நிலப்பகுதிகளின் விளைச்சல்களை விட அதிகமாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். எனவே, A உரம் மற்ற உரங்களான B, C, D ஆகியவற்றைவிடச் சிறந்தது என எண்ணுவது இயற்கையே. எனினும், A பயன்படுத்தப்பட்ட பகுதியில் B, C, D ஆகியவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று பயன்படுத்தப் பட்டிருந்தாலும், அப் பகுதி A பயன்படுத்தப்பட்டபோது தந்த விளைச்சல்களையே தந்திருக்குமா அல்லது தந்திராதா எனக் கூறுதல் இயலாது. ஒரே நிலப்பகுதியில் மண் வளத்தில் வேறுபாடுகள் உள்ளன என்பதை யாவரும் அறிவர். மண் வளம் வேறுபாடுகள் இன்றி ஒரே மாதிரி இருப்பினும், விளைச் சல்கள் எண்ணற்ற காரணங்களினால் பாதிக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறிருக்க, விளைச்சல்களில் உள்ள வேறுபாடுகள் உரங் களினால் ஏற்பட்டவை எனக் கூறுவது எவ்வாறு பொருந்தும்? விளைச்சல்களில் உள்ள வேறுபாடுகள் வாய்ப்புக் காரணங் களினால் ஏற்பட்ட ஏற்றத்தாழ்வுகளாகவும் இருக்கலாம். விளைச் சல்களில் உள்ள வேறுபாடுகள் மண்வள வேறுபாடுகளினால் ஏற்பட்டவையா? உரங்களின் விளைவுகளினால் ஏற்பட்ட வையா? வாய்ப்புக் காரணங்களினால் ஏற்பட்டவையா? ஒழுங்கு முறையில் அமைக்கப்பட்ட சோதனையைக் கொண்டு இக் கேள்விகளுக்கான விடைகளைக் காண இயலா.

இந்த அடிப்படையான சிக்கலுக்குத் தீர்வு என்ன? மண்வள வேறுபாடுகளினால் ஏற்பட்ட விளைவுகளை நீக்கிய பின்பு, வாய்ப்பின் காரணமாக ஏற்பட்ட விளைவுகளின் மதிப்பீட்டைப் பெறவேண்டும். இந்த மதிப்பீட்டுடன் உரங் களின் விளைவுகளின் மதிப்பீட்டை ஒப்பிடும்பொழுது, உரங் களின் விளைவுகளின் மதிப்பீடு பொருளுடையதாக இருப்பின், விளைச்சல்களில் உள்ள வேறுபாடுகள் உரங்களின் விளைவு களினால் ஏற்பட்டவை எனக் கொள்ளலாம். இது புதிய முறையில் அமைக்கப்பட்ட சோதனைகளில் கையாளப்படும் முறையாகும். இப் பரிசோதனை முறையும், அதற்கேற்ப அமைக்கப்படும் திட்டங்களும் பின்வரும் அத்தியாயங்களில் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

2. அடிப்படைப் புள்ளியியல் கருத்துப் படிவங்கள்

பரிசோதனை அமைக்கவும் ஆராயவும் பயன்படும் சில அடிப் படை புள்ளியியல் கருத்துப்படிவங்களையும் தத்துவங்களையும் காண்போம்.

முழுமைத் தொகுதி என்பது கண்டறியக்கூடிய சில பொது வான தனிச்சிறப்புப் பண்புகளைக் (some common observable characterstics) கொண்ட நபர்களையோ அல்லது பொருள் களையோ கொண்ட தொகுதியைக் குறிக்கலாம், அல்லது அத் தனிச் சிறப்புப் பண்புகளின் அளவுகளைக் (measurements) கொண்ட தொகுதியை குறிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, பள்ளி மாணவர்களைப் பற்றி ஆய்வு நடத்தும்பொழுது மாணவர்களின் தொகுதி முழுமைத் தொகுதியாகும். பள்ளி மாணவர்களின் கற்கும் திறன்களின் அளவுகளைப்(learning sk ills)பற்றிய ஆய்வில், கற்கும் திறன்களின் அளவுகளின் தொகுதி முழுமைத் தொகுதி யாகும். பரிசோதனைகளில் முழுமைத் தொகுதி முழுமையையும் ஆராய்வதென்பது பொதுவாக இயலாததொன்று. எனவே, முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு சிறுபகுதி யாகிய மாதிரி (sample) யைக் கொண்டு பரிசோதனை நடத்தப் படுகின்றது. இச் சோதனையின் முடிவுகளைக் கொண்டு முழு மைத்தொகுதியைப்பற்றி உய்த்துணரப் படுகின்றது.

முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள தனித்த (individuals) மதிப்பு களிடையே மாறுபாடுகள் இருப்பதால், ஒரு முழுமைத் தொகு தியிலிருந்தே எடுக்கப்படும் மாதிரிகள் வேறுபடுகின்றன. தேர்ந் தெடுக்கப்படும் மாதிரி ஒரு புறச்சாய்வு உடையதாக (biased) இருந்தால், அதிலிருந்து பெறப்படும் முடிவுகள் ஒருபுறச் சாய் வுடையதாகவே இருக்கும். எனவே, மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்

கும் முறை மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகும். ஒரு புறச் சாய்வு ஏற்படாமல் தடுக்கவும், மாதிரி ஒரு புறச்சாய்வுடைய தாய் இல்லாமலிருந்தும் ஒரு புறச்சாய்வுடையது எனக் குறை கூறப்படுவதைத் தவிர்க்கவும் ராண்டம் மாதிரி முறை (Random Sampling Method) மேற்கொள்ளப்படுகின்றது.

ராண்டம் மாதிரி முறையில் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு தனித்த மதிப்பும் (every individual) மாதிரியில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்குச் சமமான தன்னியலான (equal and independent) நிகழ்திறத்தைப் பெற்றுள்ளது. ராண்டம் மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுக்க ராண்டம் எண்கள் கொண்ட அட்டவணையைப் பயன்படுத்தலாம்.

முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள தனித்த மதிப்புகளை, அவற்றின் பரிமாணங்களுக்கு ஏற்பச் சீராக அமைக்கலாம். தனித்த மதிப்புகளின் சார்பு அலைவெண்களைத் (relative frequencies) தரும் சார்பு (function) தனித்த மதிப்புகளின் பரவல் (distribution of the individuals) எனப்படுகின்றது. ஒரு பரவல் தனித்த (discrete) தாகவோ அல்லது தொடர்ச்சியான (continuous) தாகவோ இருக்கும். தனித்த பரவலில் x மாறி (x variable) தனித்தனி மதிப்புகளையே பெற்றிருக்கின்றது. எடுத்துக்காட்டாகச் சோதனையில் புழுபூச்சி கொல்லி மருந்திறல் ஒவ்வொருதடவையும் கொல்லப்பட்ட புழுபூச்சிகளின் எண்ணிக்கைகள் தனித்த பரவலைத் தருகின்றன. ஊட்ட உணவுச் சோதனையில் எடை அதிகரிப்புகள் தொடர்ச்சியான பரவலில் அமைந்துள்ளன. x மாறியின் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்குமான நிகழ்திறத்தைக் கொண்டு தனித்த பரவல் குறிக்கப்படுகின்றது. ஒரு நாணயத்தை n முறை சுண்டுவதாகக் கொண்டால், ஒருமுறை கூட தலை திரும்பாததற்கான நிகழ்திறம், ஒருமுறை தலை திரும்புவதற்கான நிகழ்திறம், இருமுறை தலைகள் திரும்புவதற்கான நிகழ்திறம்...... n முறை தலைகள் திரும்புவதற்கான நிகழ்திறம் என நிகழ்திறங்களைக்கொண்டு தனித்த பரவலைக்குறிப்பிடலாம். $f(xi)$ என்பது i ஆவது நிகழ்திறத்தைக் குறிக்கின்றது எனக் கொண்டால், $\sum_{i=0}^{n} f(x_i) = 1$. இந்தப் பரவல் நிகழ்திறங்களின் கூட்டுத்தொகை ஒன்று என்ற தேவையைப் பூர்த்தி செய்கின்றது. தொடர்ச்சியான பரவலில் x மாறி, $(x, x+dx)$ என்ற மிக நுண்ணிய (infinitesimal) இடைவெளியில் அமைந்திருக்க நிகழ்திறம் $f(x)\,dx$ ஆகும். x-ன் பரவல் $-\infty$ யிலிருந்து $+\infty$ வரை இருப்பதாகக் கொள்ளலாம். மொத்த நிகழ்திறம் ஒன்

றிற்குச் சமம். இதை வளை கோட்டின் கீழ் உள்ள பரப்பு ஒன்று எனக் கூறலாம். அதாவது

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

முழுமைத் தொகுதியின் பரவலை, பராமீட்டர்களைக் கொண்ட அலைவுச் சார்பலனுல் குறிக்கலாம். பராமீட்டர்கள், முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டிடை (μ), மாறுபாடு (σ^2) போன்ற அளவைகள் ஆகும்.

பரவலின் மைய நிலைப் போக்கு அளவையாகிய கூட்டிடை, பரிசோதனைகளில் மிகவும் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. கூட்டிடை என்பது தனித்த மதிப்புகளின் சராசரி ஆகும். மிகவும் பயன் படும் சிதறல் அளவை மாறுபாடு (variance) ஆகும். முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டிடைக்கும், தனித்த மதிப்புகளுக்கும் உள்ள வேறுபாடுகளின் வர்க்கங்களின் சராசரியே மாறுபாடு ஆகும்.

புள்ளியியல் கோட்பாட்டின் முக்கியமான செயல்களில் ஒன்று மாதிரி விவரங்களிலிருந்து பராமீடர்களை மதிப்பிடுவது ஆகும். இனி, பரவல்கள் சிலவற்றைப் பார்ப்போம்.

ஈறுருப்புப் பரவல் : இஃது ஒரு தனித்த பரவலாகும். மீண்டும் செய்யப்படும் முயற்சிகள் (trials) ஒவ்வொன்றிலும் வெற்றியின் நிகழ்திறம் P எனில், n சார்பிலா முயற்சிகளில் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையின் பரவலை ஈருறுப்புப் பரவல் தருகின்றது. x வெற்றிகளின் நிகழ்திறம்,

$$p_x = \left(\frac{n}{x}\right) p^x q^{n-x} \quad o \leq x \leq n$$
$$q = 1 - p$$

இந்தப் பரவலின் கூட்டிடை np; மாறுபாடு npq. கூட்டிடையும் மாறுபாடும் ஒன்றையொன்று சார்ந்துள்ளன. n-ன் மதிப்பு எண்ணிலியை நெருங்கும் பொழுது ஈருறுப்புப் பரவல் இயல் நிலைப் பரவலின் வழிப்படுகின்றது.

பாய்சான் பரவல்: இது மற்ருெரு தனித்த பரவலாகும். ஈறுருப்புப் பரவலில் n பெரிதாகவும், p மிகச்சிறிதாகவும் இருந்து, np-ன் மதிப்பு மாருத m-க்குச் சமமாக இருந்தால், ஈருறுப்புப் பரவல் பாய்சான் பரவல் வழிப்படுகின்றது. பாய் சான் பரவலில் x வெற்றிகளின் நிகழ்திறம்,

$$p_x = \frac{e^{-m}\ m^x}{x\ !}\quad 0 \leq x \leq \infty$$

பாய்சான் பரவலின் கூட்டிடை m-க்குச் சமமாக இருக்கின்றது. மாறுபாடும் m-க்குச் சமமாக இருக்கின்றது. அதாவது பாய்சான் பரவல் ஒரு பராமீடர் குடும்பத்தைச் சேர்ந்தது.

இயல் நிலைப் பரவல் : புள்ளியியலில் மிக முக்கியமான பரவல் இயல்நிலைப்பரவலாகும். இஃது ஒரு தொடர்ச்சியான பரவல் உயிரினங்களிலும் தாவர இனங்களிலும் எடுக்கப்படும் அளவுகள் (measurements) பெரும்பாலும் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைகின்றன. இதற்கு அனுபவ ரீதியான மெய்ப்பிப்பு (empirical justification) உண்டு. இதேபோல, இயற்பியல் சார் புத்துறை (physical science)யிலும், சமுதாயஞ்சார்ந்த துறையிலும் வரும் விவரங்களை ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்க வகையில் இயல்நிலைப் பரவலில் குறிக்கலாம். ஆனால், தொடர்ச்சியான எல்லா விவரங்களையும் நிலைப் பரவலில் குறிக்கமுடியும் எனக் கொள்ளுவது தவறு. இயல்நிலைப்பரவலின் அலைவுச் சார்பலன்,

$$f\ (x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\ (x-\mu)^2}$$

இதில், μ-ம் σ-ம் முறையே இயல்நிலைப் பரவலின் பராமீட்டர்களான கூட்டிடையும் தரவிலக்கமும் ஆகும். முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டிடை μ-ன் மிகச் சிறந்த மதிப்பீடு (best estimate) முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n மதிப்புகளைக் கொண்ட ராண்டம் மாதிரியின் கூட்டிடை x ஆகும்.

இந்த மதிப்பீடு $\bar{x}$, கூட்டிடை μ ஐயும் மாறுபாடு $\frac{\sigma^2}{n}$ ஐயும் கொண்டு இயல் நிலையில் பரவியுள்ளது. முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2-ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடு (unbiased estimate) ராண்டம் மாதிரியின் மாறுபாடு s^2 ஆகும்;

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\ (x_i-\bar{x})^2$. ராண்டம் மாதிரியின் கூட்டிடை $\bar{x}$-ம், மாறுபாடு s^2-ம் சார்பிலாமுறையில் பரவியுள்ளன.

$x_1, x_2, \ldots x_n$ என்பன முறையே $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ கூட்டிடைகளுடன் $\sigma_1^2, {}_2^2, \ldots \sigma_n^2$ மாறுபாடுகளுடன் சார்பிலாது இயல்நிலையில் பரவியுள்ளன எனில், இவற்றின்,

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots\ldots + a_n x_n$ என்ற ஒருபடிச்சார்பு,

$a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \ldots\ldots + a_n \mu_n$ என்ற கூட்டிடையுடன்

$a x_1 \sigma_1^2 + a_2 \sigma_2^2 + \ldots\ldots + a_n \sigma_n^2$ என்ற மாறுபாட்டுடன்

இயல் நிலையில் பரவியுள்ளது.

$x_1, x_2, \ldots x_n$ என்பன இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து ராண்டம் முறையில் எடுக்கப்பட்ட மாதிரி எனில், n மதிப்புகளுக்கிடையேயான ஒருபடி வேறுபாட்டு முனைப்பை (linear contrast) ஒரு சார்பால் குறிக்கலாம்.

$$l_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots\ldots + a_n x_n$$

இதில் $a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n = 0$

$$l_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n; \sum_{i=}^{n} b_i = 0$$

என்பது மற்றொரு ஒருபடி வேறுபாட்டு முனைப்பிற்கான சார்பு.

l_1, l_2 என்ற இரு ஒருபடி வேறுபாட்டு முனைப்புகளில், $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots\ldots + a_n b_n = 0$ ஆக இருப்பின் l_1-ம் l_2-ம் ஒன்றையொன்று சாராது இருக்கின்றன; l_1-ம், l_2-ம் ஒன்றையொன்று சாராத முறையில் பரவியுள்ளன. l_1ஐயும் l_2ஐயும் வெவ்வேறு பராமீடர்களை மதிப்பிடப் பயன்படுத்தப்படின், மதிப்பிடுவதில் உள்ள பிழைகளும் ஒன்றையொன்று சாராது இருக்கின்றன. மதிப்பீடுகள் ஒன்றையொன்று சாராது உள்ளன.

'கை' இருபடி வர்க்கப்(χ^2)பரவல்: $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பன பூச்சியம் கூட்டிடையும் $\sigma_2 = 1$ மாறுபாடும் கொண்ட தனித்த இயல்நிலை மாறிகள் எனில், இவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 'கை' இருபடி வர்க்கப் பரவலில் பரவியுள்ளது. அதாவது $x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2$, n வரையற்ற பாகைகளுடன் χ^2 பரவல் முறையில் உள்ளது. χ^2–பரவலின் உருப்படிவம்,

$$f(\chi^2)=\frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\,e^{-\chi^2/2}\,\chi^{2\,(n/2-1)}$$ $n=$வரையற்ற பாகைகள். $0\leq\chi^2\leq\infty$

$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ஆனது $(n-1)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2 ஆகப் பரவியுள்ளது.

t பரவல்: μ கூட்டிடையும் σ^2 மாறுபாடும் கொண்ட இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரி $x_1, x_2 \ldots x_n$ எனில்,

$$t=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$ என்பது 't' பரவலாகப் பரவியுள்ளது.

(வரையற்ற பாகைகள் $= n-1$)

இதில் $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

v வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட 't' பரவலின் வடிவம்:

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v}\,\Gamma(v/2)}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \qquad -\infty\leq t\leq\infty$$

இயல் நிலைப் பரவலைக்கொண்ட இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து ராண்டம் முறையில் எடுக்கப்பட்ட இரு மாதிரிகளின் கூட்டிடைகளைச் சோதிக்க 't' பரவல் பயன்படுகின்றது. அவ்விரு கூட்டிடைகள் $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ எனில்,

$$\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2+\sum_{i=1}^{n2}(x_{2j}-\bar{x}_2)^2}}\times\sqrt{\frac{(n_1+n_2-2)\,n_1 n_2}{n_1+n_2}}$$

என்பது (n_1+n_2-2) வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட பரவலாகும். n_1, n_2 என்பன மாதிரிகளின் அளவுகளைக் sizes) குறிக்கின்றன.

F–பரவல்: $x_{11}, x_{12}, x_{13}, ..x_{11}$; $x_{21}, x_{22}, x_{23}, ...x_{2n2}$ என்பன σ^2 மாறுபாடு கொண்ட இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளி லிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரிகள் எனவும்,

$$S_1{}^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2, \quad S_2{}^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j} - \bar{x}_2)^2$$

என்பன அவற்றின் பிறழ்ச்சியற்ற மாறுபாடுகள் எனவும் கொண்டால், $S_1{}^2/S_2{}^2$ என்ற விகிதம் $(n_1 - 1)$, $(n_2 - 1)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட F ஆகப் பரவியுள்ளது v_1, v_2 வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட F பரவலின் வடிவம்,

$$f(F) = \frac{v_1 \, v_1/2 \; v_2 \; v_2/2 \quad F^{\frac{v_1 - 2}{2}}}{B\left[\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}\right] (v_1 F + v_2)^{\frac{1}{2}(v_1 + v_2)}} \qquad 0 \leq F \leq \alpha$$

இயல் நிலைப் பரவல்களைக் கொண்ட பல முழுமைத் தொகுதிகளின் மாறுபாடுகள் சமமாக இருக்கும்பொழுது, அவற்றின் கூட்டிடைகளைச் சோதிக்க F பரவல் பயன்படுகின்றது.

மதிப்பிடுதல் (Estimation) :

நேர்இலக்கு மதிப்பீடு (Point Estimate) : $f(x, \theta)$ என்ற அடர்த்திச் சார்பினைக் (Dens'ty function) கொண்ட முழுமைத் தொகுதியின் பராமீட்டர் θ ஐ முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரியின் தனித்த மாறிகள் $x_1, x_2 ......x_n$ஐக் கொண்டு மதிப்பிடலாம். θ-ன் மதிப்பீட்டை மாதிரி மதிப்புகளில் (in terms of sample values) காணலாம். பொதுவாக முழுமைத் தொகுதியின் பராமீட்டர் θ-ன் மதிப்பு எனக் கொள்ளத்தகும் அளவை மாதிரி மதிப்புகளிலிருந்து காண்பது மதிப்பிடுவது ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டிடையின் மதிப்பீடாக, மாதிரியின் கூட்டிடை அல்லது இடைநிலை அல்லது முகடு அல்லது இவை போன்ற அளவுகளில் ஏதாவது ஒன்றைக் கொள்ளலாம். இம் மதிப்பீடுகளில், பொருத்தமுடையதாய் (consistent), பயில்திறனுடையதாய் (efficient), தேவைக்குப் போதுமானதாய் (Sufficient) இருக்கும் மதிப்பீடு மிகச் சிறந்த மதிப்பீடு (best estimate) ஆகும். மதிப்பிடுதலில் பலமுறைகள் உள்ளன. செய்முறைத்திட்டத்தில் மதிப்பிடப்

பயன்படுத்தும் முறை குறைந்த வர்க்க முறை (Method of least squares) ஆகும்.

இடைவெளியை மதிப்பிடுதல் (Interval Estimation)

ஒரு நேர் இலக்கு மதிப்பீடு எவ்வளவு சிறந்ததாக இருப்பினும், முழுமைத் தொகுதியின் பராமீட்டரின் மதிப்பிற்கு அது சமமாக இருக்கும் என எதிர்பார்க்க முடியாது. எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு நம்பிக்கையுடன் முழுமைத் தொகுதியின் பராமீட்டர் அமைந்திருக்கக் கூடிய இடைவெளியைக் காண்பது சிறந்ததாகும். பராமீட்டர்களுக்கான இடைவெளிகள் நம்பிக்கை இடைவெளிகள் (confidence Intervals) எனப்படுகின்றன. இவ் விடைவெளிகளைக் குறிக்கும் எல்லைகள் நம்பிக்கை எல்லைக (confidence limits)ளாகும். இவ் வெல்லைகளான C_1, C_2, மாதிரி மதிப்புகளாகிய x_1, x_2,...x_nன் சார்புகள் ஆகும். C_1, C_2-க்கு இடையேயுள்ள இடைவெளி ஒரு குறிப்பிட்ட சதவீத அளவில் பராமீட்டர் θ ஐக் கொண்டிருக்கும். எனவே, இந்த சதவீத அளவு, மாதிரி மதிப்புகள் ஆகியவற்றின் சார்பாக நம்பிக்கை எல்லைகள் அமைகின்றன. இந்த சதவீத அளவு, நம்பிக்கை நிகழ்திறம் (Confidence probability) எனப்படுகின்றது. முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு மாதிரிக்கும் புதிதாக நம்பிக்கை எல்லைகளைக் கணக்கிடலாம். இவ்வாறு ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் மாதிரி ஒவ்வொன்றிற்கும் நம்பிக்கை இடைவெளி கணக்கிடப்படின், இந்த நம்பிக்கை இடைவெளி ஒரு குறிப்பிட்ட சதவீதம் தடவை பராமீடர் θ ஐக் கொண்டிருக்கும். குறியீடுகளில் இதையே, $P\ (C_1 < \theta < C_2) \geq 1-\alpha$ எனக்கூறலாம். அதாவது, பராமீடர் θ ஐக் கொண்டிருக்கும் இடைவெளி (C_1, C_2)-ன் நிகழ்திறம் $(1-\alpha)$-வை விடப் பெரியது அல்லது $(1-\alpha)$க்குச் சமம். α-ன் மதிப்பு ஒன்றை விடச் சிறியது. அதிக எண்ணிக்கையிலான மாதிரிகளுக்கு (for a large number of samples) மட்டுமே இந் நிகழ்திறம் பொருந்துகின்றது. அதாவது அதிக எண்ணிக்கையிலான மாதிரிகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் நம்பிக்கை இடைவெளி (C_1, C_2)யைக் கணக்கிட்டு, பராமீட்டர் θ இவ் விடைவெளியில் இருக்கின்றது என்றுகூறினுல், அக்கூற்று சராசரியாக $1-\alpha$ தடவைகள் உண்மையாக இருக்கும் (α தடவைகள் தவருக இருக்கும்).

எடுத்துக்காட்டாக, இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து ராண்டம் முறையில் எடுக்கப்பட்ட $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற மாதிரியைக் கொண்டு முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டிடை μ-க்கு நம்

பிக்கை இடைவெளியைக் காண்போம். முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2ன் மதிப்பு தெரியாது எனக் கொள்வோம்.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$, $(n-1)$ வரையற்ற பாகைகளுடன் 't' ஆகப்

பரவியுள்ளது. இதில் $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$; $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

நம்பிக்கை நிகழ்திறம் 0.95 எனக் கொண்டால்,

$$P\left[\left| \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \right| \leq t_{0 \cdot 05} \right] = 0.95$$

அல்லது.

$$P\left[\bar{x} - \frac{s t_{0 \cdot 05}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{s t_{0 \cdot 05}}{\sqrt{n}} \right] = 0.95$$

இவ் விடைவெளியைக் குறிக்கும் நம்பிக்கை எல்லைகள்,

$$\bar{x} - \frac{s t_{0 \cdot 05}}{\sqrt{n}} , \bar{x} + \frac{s\, t_{0 \cdot 05}}{\sqrt{n}}$$ என்பன.

எடுகோள்களைச் சோதித்தல்

எடுகோள் என்பது ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட முழுமைத் தொகுதிகளின் பராமீட்டர் அல்லது பராமீட்டர்கள் பற்றிய கூற்று ஆகும். சூனிய எடுகோள் (Null Hypothesis) என்பது எடுத்துக் கொண்ட பராமீட்டர்களிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற கூற்ருகும். சூனிய எடுகோள் நிரூபிக்கப் படுவதோ அல்லது நிலைநாட்டப்படுவதோ இல்லை. ஆனல் பரிசோதனையைக் கொண்டு சரியில்லையென நிரூபிக்கப்படலாம். 'சூனிய எடுகோளைத் தவறு என நிரூபிக்க ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சிக் (fact)கும் வாய்ப்பளிக்கவே ஒவ்வொரு பரிசோதனையும் உள்ளது எனலாம்' எனப் பேராசிரியர் ∴பிசர் கூறுகிருர். ஒரு குறிப்பிட்ட சூனிய எடுகோளைச் சோதிக்கும்பொழுது, ஆய்வாளர் அதனைச் சரியில்லை என நிராகரிக்கலாம் அல்லது நிராகரிக்காமல் இருக்கலாம். தள்ளாமல் இருக்கிருர் எனில், சூனிய எடுகோளைச் சரியென ஒத்துக் கொண்டார் என்பதாகாது. பரிசோதனையின் முடிவுகள் சூனிய எடுகோளைச் சரியில்லையெனத் தள்ளச் செய்யுமேயன்றி, சரியென நிலைநாட்ட மாட்டா,

எடுகோளைச் சோதிக்கும்பொழுது இருவகையான பிழைகள் ஏற்படலாம். H_0 என்பது சூனிய எடுகோளாகவும், H_1 என்பது மாற்றெதிர் எடுகோளாகவும் (Alternative Hypothesis) கொள்வோம். பரிசோதனையில் H_0 உண்மையாக இருக்கும்பொழுது, H_0 ஐ நிராகரித்தல் பிழையாகும். இது முதல்வகைப் பிழை (Type I error) ஆகும். H_0 உண்மையில் சரியற்றதாக இருந்து H_1 உண்மையானதாக இருக்கும்பொழுது H_0 ஐ நிராகரிக்காமல் இருப்பது, இரண்டாவது வகைப் பிழை (Type II error) ஆகும்.

சிறப்புகாண் சோதனை என்பது ஓர் எடுகோள் நிராகரிக்கப்பட வேண்டுமா அல்லது நிராகரிக்கப் படக்கூடாதா என்பதை நிர்ணயிக்கும் முறையாகும். ஓர் எடுகோள் நிராகரிக்கப்படவில்லை (not rejected) எனில், சரியில்லையென நிரூபிக்கப் போதிய அளவு நிரூபணம் கிடைக்கும்வரை அவ்வெடுகோள் ஒப்புக் கொள்ளப் பட்டதாகக் கொள்ளலாம்.

3. பரவற்படி ஆய்வு

தரப்பட்ட விபரங்களின் மாறுபாடு (variation) பலபடித் தானதாக (heterogeneous) இருந்தால், அம் மாறுபாடு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறுபாட்டுப் பகுதிகளைக் (components of variation) கொண்டுள்ளதாகக் கூறலாம். இவ்வாறுள்ள மாறுபாட்டுப் பகுதிகளைப் பரவற்படி ஆய்வு முறையால் வகைப் படுத்திப் பிரிக்கலாம். பரவற்படி ஆய்வு முறையை நன்கு புரிந்து கொள்ள மாறுபாட்டுப் பகுதிகள் என்பன எவற்றை உணர்த்துகின்றன என்பதை அறிந்து கொள்வது இன்றியமையாதது ஆகும்.

ஒரே மாதிரியான வளம் பொருந்திய விளைநிலம் n_1 சமக் கூறுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு ஒரு குறிப்பிட்ட வகை தானியம் பயிரிடப்படுகின்றது எனவும், எல்லாக் கூறுகளிலும் ஒரேவகையான உரம் ஒரே அளவு பயன்படுத்தப்படுகின்றது எனவும் கொள்வோம். n_1 நிலக்கூறுகள் ஒரே மாதிரியான வளத்தைக் கொண்டிருப்பதாலும், அவற்றில் ஒரேவகையான உரம் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளதாலும், அவற்றில் விளைந்த தானியத்தின் விளைச்சல்களின் அளவுகள் இயல் நிலையில் பரவியுள்ளன. ஆகவே, விளைச்சல்களின் மாறுபாடு ஒருபடித் தானது எனக் கொள்ளலாம். இனி இதே அளவு வளத்தையும் பரப்பையும் கொண்ட n_2 நிலக்கூறுகளில் இதே வகை தானியம் பயிரிடப்படுகின்றது எனவும், ஆனால் இந் நிலக்கூறுகளில் வேறுவகை உரம் ஒரே அளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றது எனவும் கொள்வோம். n_2 கூறுகளை மட்டும் கருதும் பொழுது, விளைச்சல்களின் மாறுபாடு ஒருபடித்தானதாக இருக்கும். ஆனால், வேறுவகை உரம் பயன்படுத்தப்பட்டிருப்பதால் n_2 கூறுகளின் விளைச்சல்கள் n_1 கூறுகளின் விளைச்சல்களிலிருந்து வேறுபட்டிருக்கின்றன எனக் கொள்ளலாம்.

அதாவது, n_1 கூறுகளின் விளைச்சல்களின் சராசரிக்கும், n_2 கூறுகளின் விளைச்சல்களின் சராசரிக்கும் இடையே வேறுபாடு இருக்கும். இப்பொழுது, முதல் பிரிவான n_1 கூறுகளின் விளைச்சல்களையும், இரண்டாவது பிரிவான n_2 கூறுகளின் விளைச்சல்களையும் ஒன்று கலந்து ஒரு புதிய தொகுதியை ஏற்படுத்துவதாகக் கொள்வோம். இப் புதிய தொகுதியில், ஒவ்வொரு பிரிவிலுமுள்ள விளைச்சல்களின் மாறுபாட்டைத் தவிர, முதல் பிரிவின் சராசரிக்கும், இரண்டாவது பிரிவின் சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாடு என்ற ஒரு புதிய மாறுபாட்டுப் பகுதி ஏற்பட்டுள்ளது. அதாவது, புதிய தொகுதியில் இரு மாறுபாட்டுப் பகுதிகள் உள்ளன. ஒன்று, ஒவ்வொரு பிரிவிலுமுள்ள விளைச்சல்களின் மாறுபாடு. இதைப் பிரிவுகளுக்குள்ளே உள்ள மாறுபாடு எனக் கூறலாம். மற்ருென்று இரு பிரிவுகளுக்கும் இடையே உள்ள மாறுபாடு. இதேபோல, வேறுபட்ட விளைச்சல் சராசரிகளைக் கொண்ட பல பிரிவுகளை இத் தொகுதியுடன் கலக்கும் பொழுது, மேற்கூறியவாறே, பிரிவுகளுக்குள்ளே உள்ள மாறுபாடு, பிரிவுகளுக்கிடையே உள்ள மாறுபாடு என மாறுபாட்டுப் பகுதிகள் அமைகின்றன. இவ்வாறு பல பிரிவுகளைக் கொண்ட தொகுதிகளின் மாறுபாட்டுப் பகுதிகளை வகைப்படுத்திக் கணக்கிடுதல் பரவற்படி ஆய்வின் நோக்கமாகும்.

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ என்பன σ^2 மாறுபாடுகொண்ட இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரியின் மதிப்புகள் எனக் கொள்வோம். மாதிரியின் மதிப்புகளிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2யை மதிப்பிடலாம்.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \text{ இதில் } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

என்பது σ^2ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடாகும். பல மாதிரிகள் இருப்பின் மாதிரிகளின் மாறுபாடுகளின் சராசரியை σ^2ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடாகக் கொள்ளலாம்.

முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2யை மற்ருெரு வழியிலும் மதிப்பிடலாம். மாதிரிகளின் கூட்டிடைகள் $\frac{\sigma^2}{x}$ மாறு

பாட்டுடன் இயல்நிலையில் பரவியுள்ளன. $\frac{\sigma^2}{x}$-க்கும் σ-க்கும் உள்ள தொடர்பு:

$$\frac{\sigma^2}{x} = \frac{\sigma^2}{n} \; ; \text{ எனவே, } n\frac{\sigma^2}{x} = \sigma^2$$

அதாவது $\bar{x}$ பரவலின் மாறுபாட்டை மாதிரியின் அளவால் (size) பெருக்கும் பொழுது முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு கிடைக்கின்றது.

σ^2 மாறுபாடு கொண்ட இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n மதிப்புகள் கொண்ட m ராண்டம் மாதிரிகளை எடுப்பதாகக் கொள்வோம். அவற்றைப் பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.

அட்டவணை 3.1.1. மாதிரிகள்.

1	2	3	......	i	......	m
x_{11}	x_{21}	x_{31}	......	x_{i1}	......	x_{m1}
x_{12}	x_{22}	x_{32}	......	x_{i2}	......	x_{m2}
x_{13}	x_{23}	x_{33}	......	x_{i3}	......	x_{m3}
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	......	x_{ij}	......	x_{mj}
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}	......	x_{in}		x_{mn}

மொத்தம் T_1. T_2. T_3. ... T_i ... T_m. T மொத்தக் கூட்டுத் தொகை

கூட்டிடை $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ ... $\bar{x}_i$ ... $\bar{x}_m$ $\bar{x}$ பொதுக் கூட்டிடை.

m மாதிரிகளின் மாறுபாடுகள் :

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{1j} - \bar{x}_1)^2; \quad s_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_2 j - \bar{x}_2)^2 \ \ldots$$

$$s_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x\, i_j\, j - \bar{x}_1)^2$$

இவற்றின் சராசரியாக σ-ன் மதிப்பீட்டை S_P^2 எனக் குறிப்போம்.

$$S_P^2 = \frac{(n-1)\, s_1^2 + (n-1)\, s_2^2 + \ldots + (n-1)\, s_i^2 + \ldots + (n-1)\, s^2_m}{n\, m - m.}$$

m மாதிரிகளின் கூட்டிடைகளின் மாறுபாட்டை $s^2_{\bar{x}}$ எனக் குறிப்போம். $s^2_{\bar{x}}$, $\sigma^2_{\bar{x}}$-ன் மதிப்பீடாகும்.

எனவே, $s_{\bar{x}}^2$ ஐ n ஆல் பெருக்க σ^2-ன் மற்றொரு மதிப்பீடு கிடைக்கின்றது. அம்மதிப்பீட்டை S_M^2 எனக் குறிப்போம்.

$$S_M^2 = n\, s_{\bar{x}}^2$$

$$= n \cdot \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$ இதில் $\bar{x}_i$ என்பது i ஆவதுமாதிரியின் கூட்டிடை; $\bar{x}$ என்பது $m\,n$ மதிப்புகளின் பொதுக் கூட்டிடையைக் (Grand Mean) குறிக்கின்றது.

முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்க இயலும் எல்லா மாதிரிகளையும் கொண்டு S_M^2ஐயும் S_M^2ஐயும் கணக்கிடாததினால் S_P^2–க்கும் S_M^2–க்கும் இடையே வேறுபாடு இருக்கும். நாம் எடுத்துக் கொள்ளும் மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாக இருப்பின், S_P^2–க்கும் S_M^2-க்கும் உள்ள வேறுபாடு குறைந்து இருக்கும். S_P^2 S_M^2 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைப் பாதிக்கும்.

ஒரே காரணக் கூறு (factor) மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள மாறுபாடு ஆகும்.

எடுத்துக் காட்டாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள ஐந்து மாதிரிகளி லிருந்து இரு முறைகளிலும் முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2ஐ மதிப்பிடலாம்.

அட்டவணை 3.1.2. மாதிரிகள்

	I	II	III	IV	V
	51	59	40	61	65
	60	53	59	75	67
	54	70	60	52	49
	52	60	66	70	57
	54	73	59	51	75
மொத்தம்	271	315	284	309	313
			1492 (மொத்தக் கூட்டுத் தொகை)		
கூட்டிடை	54.2	63.0	56.8	61.8	62.6
				59.68 (பொதுக் கூட்டிடை)	

ஐந்து மாதிரிகளின் மாறுபாடுகளின் சராசரி,

$$S_P^2 = \frac{1}{4 \times 5}\left[\left(14737 - \frac{73441}{5}\right) + \left(20119 - \frac{99225}{5}\right) + \left(16518 - \frac{80656}{5}\right) + \left(19551 - \frac{95481}{5}\right) + \left(19989 - \frac{97969}{5}\right)\right]$$

$$= 77.98$$

பின்பு ஐந்து கூட்டிடைகளின் மாறுபாட்டினை ஐந்தால் பெருக்க σ^2-ன் மற்றொரு மதிப்பீடாகிய S_M^2 கிடைக்கின்றது.

$$S_M^2 = \tfrac{5}{4}[(54.20 - 59.68)^2 + (63.00 - 59.68)^2 + (56.80 - 59.68)^2 + (61.80 - 59.68)^2 + (62.60 - 59.68)^2]$$

$$= 76.70.$$

77.98-ம், 76.70-ம் முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2-ன் மதிப்பீடுகளாகும்.

முழுமைத் தொகுதி ஒரே மாதிரியாக இல்லாமல் இருந்தால் என்ன நிகழ்கிறது என்பதைக் காண்போம். ஒவ்வொரு மாதிரியிலும் உள்ள மதிப்புகள் நிலைக் கூறுகளிலிருந்து பெற்ற குறிப்பிட்ட தானியத்தின் விளைச்சல்களைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு மாதிரியிலுமுள்ள நிலைக் கூறுகளில் வெவ்வேறு உரங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளதால், விளைச்சல்கள் மாதிரிக்கு மாதிரி வேறுபட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். இவ்வாறு மாதிரிகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாட்டினுல் அவற்றின் கூட்டிடைகள் பாதிக்கப்படுகின்றன. இதனுல் மாதிரிகளின் கூட்டிடைகளின் மாறுபாட்டைக் கொண்டு மதிப்பிடப்படும் முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டின் மதிப்பீடு பாதிக்கப்படுகின்றது. இவ்வாறு பாதிக்கப்பட்ட மதிப்பீட்டை $S'_M{}^2$ எனக் குறிக்கலாம். ஒரு குறிப்பிட்ட மாதிரியில் உள்ள மதிப்புகள், அவற்றுள் ஒன்றுக்கொன்று முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள மாறுபாட்டினுல் (variation) மட்டுமே வேறுபடும். ஏனெனில், அக் குறிப்பிட்ட மாதிரி முழுமைக்கும் பயன்படுத்தப்பட்ட உரம் ஒரேவகையைச் சேர்ந்ததாக இருப்பதால், அம் மாதிரி முழுமைக்கும் உரத்தின் விளைவு (effect) ஒரே மாதிரியானதாகவே இருக்கும். ஆனுல், மாதிரிகளின் கூட்டிடைகள் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள மாறுபாட்டினேடு உரங்களின் வேறுபாட்டினுலும் பாதிக்கப்படுகின்றன. எனவே, முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டின் மதிப்பீடுகளாகிய $S_P{}^2$-க்கும் $S'_M{}^2$-க்கும் உள்ள வேறுபாடு, மாதிரிகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாட்டினுல் ஏற்பட்டதாகும். அதாவது, ஒவ்வொரு மாதிரிக்கும் வெவ்வேறு உரங்களைப் பயன்படுத்தியதால் ஏற்பட்ட விளைவாகும். இந்த நிலைமையைப் பின்வரும் அட்டவணையைக் கொண்டு விளக்கலாம்.

அட்டவணை 3. 1. 3. மாதிரிகள்

	1	2	...	i	...	m
	$x_{11}+y_1$	$x_{21}+y_2$	...	$x_{i1}+y_i$	...	$x_{m1}+y_m$
	$x_{12}+y_1$	$x_{22}+y_2$	...	$x_{i2}+y_i$	...	$x_{m2}+y_m$
	⋮	⋮		⋮		⋮
	$x_{1j}+y_1$	$x_{2j}+y_2$	...	$x_{ij}+y_i$	...	$x_{mj}+y_m$
	⋮	⋮		⋮		⋮
	$x_{1n}+y_1$	$x_{2n}+y_2$	...	$x_{in}+y_i$	...	$x_{mn}+y_m$
மொத்தம்	T_1+ny_1	T_2+ny_2	...	T_i+ny_i	...	T_m+ny_m
கூட்டிடை	$\bar{x}_1+y_1$	$\bar{x}_2+y_2$	...	$\bar{x}_i+y_i$	...	$\bar{x}_m+y_m$

மொத்தக் கூட்டுத் தொகை $= T + n(y_1 + y_2 + \ldots + y_m)$

i ஆவது மாதிரியில் ஒவ்வொரு மதிப்புடனும் y_i சேர்ந்துள்ளது. y_i என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட உரத்தைப் பயன்படுத்தியதால் ஏற்பட்ட விளைவு ஆகும். அவ்வுரம் அம்மாதிரி முழுமைக்கும் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளதால், அதனால் ஏற்படும் விளைவு அம்மாதிரியிலுள்ள எல்லா மதிப்புகளுக்கும் சமமாக இருக்கிறது. இதே போல மற்ற ஒவ்வொரு மாதிரியிலும் உள்ள மதிப்புகளுடன் அந்தந்த மாதிரிக்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட உரத்தின் விளைவு சேர்ந்துள்ளது.

iஆவது மாதிரியின் கூட்டிடை

$$= \frac{x_{i_1} + y_i + x_{i2} + y_i + \dots + x_{in} + y_i}{n}$$

$$= \bar{x}_i + y_i$$

iஆவது மாதிரியின் மாறுபாடு

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} [(x_{ij} + y_i) - (\bar{x}_i + y_i)]^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 = s_i^2$$

எனவே, உரங்களின் வேறுபாடு மாதிரிகளின் மாறுபாடுகளைப் பாதிப்பதில்லை. எனவே உரங்களின் வேறுபாட்டினால் முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டின் மதிப்பீடு,

$$S_P^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2 + \dots + (n-1)s_m^2}{nm - n}$$ பாதிக்கப்படுவதில்லை. ஆனால் மாதிரிகளின் கூட்டிடைகளின் மாறுபாட்டைக் கொண்டு பெறப்படும் மதிப்பீடு பாதிக்கப்படுகின்றது. இம் மதிப்பீடு S'^2_M என குறிக்கப்படுகின்றது.

$S'^2_M = S_M^2 + n\,S_y^2$ எனக் காணலாம்.

இதில் $S_M^2 = \frac{n}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_i - \bar{x})^2$; $S_y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{y})^2$

அதாவது, $S'_M{}^2$ ஆனது $S_M{}^2$ஐ விட $\frac{n}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2$ அளவு பெரிதாக இருக்கின்றது.

இவற்றைக் கீழ்க்கண்ட கணக்கீடுகளிலிருந்து அறியலாம். இதற்கு முந்தைய எடுத்துக்காட்டில்,

$y_1 = -2 \quad y_2 = -1 \quad y_3 = 0 \quad y_4 = 1 \quad y_5 = 2$ எனக் கொள்வோம்.

அட்டவணை 3.1.4 மாதிரிகள்

	1	2	3	4	5	
	49	58	40	62	67	
	58	52	59	76	69	
	52	69	60	53	51	
	50	59	66	71	59	
	52	72	59	52	77	
மொத்தம்	261	310	284	314	323	1492 மொத்தக் கூட்டுத் தொகை
கூட்டிடை	52.20	62.00	56.80	62·80	64.60	59.68 பொதுக் கூட்டிடை

மாதிரிகளின் மாறுபாடுகளின் சராசரி :

$$= \frac{1}{4\times5}\left[\left(13673-\frac{68121}{5}\right)+\left(19494-\frac{96100}{5}\right)+\left(16518-\frac{80566}{5}\right)+\left(20174-\frac{98596}{5}\right)+\left(21261-\frac{104329}{5}\right)\right]$$

$= 77·98$

$= S^2{}_P$

கூட்டிடைகளின் மாறுபாட்டைக் கொண்டு பெறப்படும் மதிப்பீடு

$$S'^2_M = \frac{5}{4}\Big[(52.20 - 59.68)^2 + (62.00 - 59.68)^2 + (56.80 - 59.68)^2 + (62.80 - 59.68)] + (64.60 - 59.68)^2]$$

$$= 128.45.$$

S'^2_M–ன் மதிப்பு, S^2_M, S^2_P ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைவிட அதிகமாக இருப்பதைக் காணலாம். ஆகவே கூட்டிடைகளின் மதிப்புகள் பாதிக்கப்படும் பொழுது, கூட்டிடைகளின் மாறு பாட்டைக் கொண்டு பெறப்படும் முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டின் மதிப்பீடும் பாதிக்கப்படுகின்றது. ஆனல், மாதிரி களின் மாறுபாடுகளின் சராசரியாக முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டை மதிப்பிடும் பொழுது மதிப்பீடு பாதிக்கப்படுவ தில்லை. பரவற்படி ஆய்வின் அடிப்படை இதுவாகும். இவ் வடிப் படையைக் கொண்டு பரவற்படி ஆய்வு முறையைக் காண்போம்.

1. பரவற்படி ஆய்வு—ஒரு வழிப் பாகுபாடு (One way classification)

ஒரு வழிப் பாகுபாட்டு முறையில் ஒவ்வொரு மதிப்பும், μ_1, $\mu_2, \mu_3 \ldots \mu_m$ கூட்டிடைகளைக்கொண்ட m இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளில் ஏதாவது ஒன்றை மட்டும் சேர்ந்ததாக இருக் கின்றது. இம் முழுமைத் தொகுதிகளின் மாறுபாடுகள் σ_1^2, $\sigma_2^2, \ldots \sigma^2 m$ ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருக்கின்றன. அதாவது $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma^2 m = \sigma^2$. m கூட்டிடைகள் ஒன்றுக் கொன்று சமமாக உள்ளனவா என்பதைச் சோதிப்பதே இம் முறையின் நோக்கமாகும். அதாவது ஒரு வழிப் பாகுபாட்டில் சோதிக்கப்படும் ஓர் எடுகோள் (Hypothesis),

H: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_m = \mu$ என்பதாகும்.

ஒவ்வொரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்தும் ஒவ்வொரு ராண்டம் மாதிரி தரப்பட்டுள்ளது. இந்த ராண்டம் மாதிரிகள் ஒரே அளவினதாக (same size) n–க்குச் சமமாக இருக்கலாம் அல்லது முறையே $n_1, n_2, \ldots n_i \ldots n_m$ என வேறுபட்ட அளவுகள்

கொண்டவைகளாக இருக்கலாம். m மாதிரிகளின் மதிப்பு களைக் கீழுள்ளவாறு குறிப்பிடலாம்.

அட்டவணை 3.1.5. மாதிரிகள்

	1	2	3	......	i	......	m	
	x_{11}	x_{21}	x_{31}	......	x_{i1}	......	x_{m1}	
	x_{12}	x_{22}	x_{32}	......	x_{i2}	......	x_{m2}	
	x_{13}	x_{23}	x_{33}	......	x_{i3}	......	x_{m3}	
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	
	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	......	x_{ij}	......	x_{mj}	
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	
	x_{1n_1}	x_{2n_2}	x_{3n_3}	......	x_{ini}	......	mnm	
மொத்தம்	$T_1.$	$T_2.$	$T_3.$	......	$T_i.$	......	$T_m.$	T
கூட்டிடை	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	......	$\bar{x}_i$	......	$\bar{x}_m$	$\bar{x}$

இவ்வட்டவணையில்,

$x_{ij} = i$ஆவது மாதிரியில் jஆவது மதிப்பு.

$Ti = i$ஆவது மாதிரியின் மதிப்புகளின் மொ

$\bar{x}_i = i$ஆவது மாதிரியின் கூட்டிடை.

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = \frac{T_i}{n_i}$$

$T =$ எல்லா மதிப்புகளின் மொத்தக் கூட்டு

$\bar{x} =$ பொதுக் கூட்டிடை.

$$= \frac{1}{N} \sum_{ij} x_{ij} = \frac{T}{N} \qquad (N = n_1 + n_2 + \dots + n_r$$

முன்பு கூறியவாறு முழுமைத் தொகுதி σ^2ஐ இரு வழிகளில் மதிப்பிடலாம். ஒவ்வொ

மாறுபாட்டையும் σ^2-ன் மதிப்பீடாகக் கொண்டு, எல்லா மாதிரி களின் மாறுபாடுகளின் சராசரியை σ^2-ன் ஒரு மதிப்பீடாகக் கொள்ளலாம். இதை σ^2-ன் ஒன்று சேர்க்கப்பட்ட மதிப்பீடு (pooled estimate) S_P^2 எனக் குறிக்கலாம்.

$$S_P^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\bar{x}_1)^2+\sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}-\bar{x}_2)^2+\dots+\sum_{j=1}^{n_m}(x_{mj}-\bar{x}_m)^2}{N-m}$$

$$(N = n_1+n_2+\dots+n_m.)$$

$$= \frac{1}{N-m}\left[\sum_{j=1}^{n_1}x_{1j}^2-\frac{(\sum x_{1j})^2}{n_1}+\sum_{j=1}^{n_2}x_{2j}^2-\frac{(\sum x_{2j})^2}{n_2}+\dots\dots\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2-\frac{(\sum x_{ij})^2}{n_i}+\dots+\sum_{j=1}^{n_m}x_{mj}^2-\frac{(\sum x_{mj})^2}{n_m}\right]$$

$$= \frac{1}{N-m}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2-\left\{\frac{T_1^2}{n_1}+\frac{T_2^2}{n_2}+\dots+\frac{T_m^2}{n_m}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{N-m}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2-\sum^{m}\frac{T_i^2}{n_i}\right]$$

மாதிரியின் அளவுகள் (sizes) சமமானதாக ($n_1=n_2=\dots=n_m=n$) இருந்தால்,

$$S_P^2 = \frac{1}{N-m}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}^2-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}T_i^2\right] \quad (N=mn)$$

S_P^2-ன் தொகுதியில் (numerator) உள்ளதை மாதிரி களினகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை எனவும், பகுதி யில் (denominator) உள்ளதை மாதிரிகளினகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கான வரையற்ற பாகைகள் (degress of freedom) எனவும் கூறுகிறோம்.

எனவே, மாதிரிகளின் அளவுகள் சமமானதாக இல்லா விடில், மாதிரிகளினகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை,

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_i} x^2_{ij} - \sum_{i=1}^{m} \frac{T_i^2}{n_i}$$

மாதிரிகளினகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கான வரையற்ற பாகைகள் $\Big\} = N\text{-}m.$

$$\left(N = \sum_{i=1}^{m} n_i \right)$$

மாதிரிகளின் அளவுகள் சமமானதாக $(=n)$ இருந்தால்,

மாதிரிகளினகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x^2_{ij} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} T_i^2$$

வரையற்ற பாகைகள் $= N\text{-}m$
$= m(n-1).$

மாதிரிகளின் கூட்டிடைகளிலிருந்து பெறப்பட்ட σ^2–ன் மதிப்பீடு,

$$S'^2_M = \frac{1}{m\text{-}1} \sum_{i=1}^{m} \left(n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \right.$$

$$= \frac{1}{m.1} \left\{ \sum_{i=1}^{m} n_i \, x_i^2 - N \, x^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{m\text{-}1} \left\{ \sum_{i=}^{m} \frac{Ti^2}{n_i} - \frac{T^2}{N} \right\} \quad N = \sum_{i=1}^{m} n_i$$

எல்லா மாதிரிகளின் அளவுகள் சமமாக இருந்தால்,

$$S'_M{}^2 = \frac{1}{m\text{-}1} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} T_i^2 - \frac{T^2}{N} \right\} \qquad (N = n\,m)$$

$S'_M{}^2$–ன் தொகுதியில் உள்ளதை மாதிரிகளினிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை எனவும், பகுதியில் உள்ளதை

மாதிரிகளினிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கான வரையற்ற பாகைகள் எனவும் வழங்குகிறோம்.

எனவே,

$$\left.\begin{array}{l}\text{மாதிரிகளினிடையே வர்க்கங்களின்}\\ \text{கூட்டுத் தொகை}\end{array}\right\} = \sum_{i=1}^{m} \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{T^2}{N}$$

$$\left(N = \sum_{i=1}^{m} n_i\right)$$

வரையற்ற பாகைகள் $= (m=1)$

$n_1 = n_2 = \ldots = n_m = n$ எனில்,

$$\left.\begin{array}{l}\text{மாதிரிகளினிடையே வர்க்கங்களின்}\\ \text{கூட்டுத் தொகை}\end{array}\right\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} T_i^2 + \frac{T^2}{N}$$

$$(N = m\ n)$$

வரையற்ற பாகைகள் $= (m\text{-}1)$

இனிமேல் எளிதாக இருப்பதன் பொருட்டு மாதிரிகளின் அளவுகள் $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = n$ எனக் கொள்வோம்.

மாதிரிகளினகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையையும், மாதிரிகளினிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையையும் கூட்ட மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைப் பெறலாம்.

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x^2{}_{ij} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} T_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} T_i^2 - \frac{T^2}{N}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x^2{}_{ij} - \frac{T^2}{N}$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குரிய வரையற்ற பர்கைகள் $\Big\} = (N-1)$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை இரண்டாகப் பிரித்தும் மாதிரிகளினகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையையும், மாதிரிகளினிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையையும் பெறலாம்.

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\bar{x}_{ij} - \bar{x})^2 = S$$

$$S = \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_i + \bar{x}_i - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i} \sum_{j} (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

$$+ 2 \sum_{i}, \sum_{j}, (x_{ij} - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x})$$

இதில்,

$$\sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x}) = \sum_{i} [\ (\bar{x}_i - \bar{x})(x_{i_1} - \bar{x}_i)$$

$$+ (\bar{x}_i - \bar{x})(x_{i_2} - \bar{x}_i) + \cdots\cdots$$

$$+ (\bar{x}_i - \bar{x})(x_{in} - \bar{x})]$$

$$= \sum (\bar{x}_i - \bar{x}) \{ (x_{i1} - \bar{x}_i) + (x_{i2} - \bar{x}_i) + \cdots\cdots + (x_{in} - \bar{x}_i) \}$$

$$= \sum_{i=j}^{m} (\bar{x}_i - \bar{x}) \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_i)$$

கூட்டிடையிலிருந்து ஒவ்வொரு மதிப்பும் உள்ள விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (sum of the deviations) பூச்சியத்திற்குச் சமம். எனவே,

$$\sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x}) = 0$$

ஆகவே,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \sum_i \sum_j (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

$$S = \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x})^2 + n \sum_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

$$= S_1 + S_2$$

= மாதிரிகளினகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

+ மாதிரிகளினிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

மேற்கூறியவற்றைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்தலாம்.

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

அட்டவணை 3.1.6.

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி
மாதிரி களிடையே	$m-1$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} T_i^2 - T^2/N = S_2$	$S_2/m-1 = S'^2_M$
மாதிரி களினகத்தே	$N-m$	$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_i^2 = S_1$	$S_1/N-m = S_P^2$
மொத்தம்	$N-1$	$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{T^2}{N} = S$	

ஆய்வு முறை

H_o: $\mu_1 = \mu = \ldots\ldots = \mu_m$ என்ற எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும்பொழுது S_P^2-ம், S'^2_M-ம் முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2-ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடுகள் (unbiased estimates) ஆகும். எனவே, S_P^2-ம் S'^2_M-ம் அநேகமாக சமமாக இருக்கும்.

எனவே, S'^2_M/S_P^2 என்ற விகிதத்தின் மதிப்பு ஒன்றை மிக நெருங்கியதாய் இருக்கும். எடுகோள் தவறுனதாக இருக்கும் பொழுது, S_P^2-ன் மதிப்பு மாறுமல் இருக்கும். ஆனல் S'^2_M-ன் மதிப்பு அதிகரிக்கின்றது. இதை முன்பே கண்டோம். எனவே, S'^2_M/S_P^2 என்ற விகிதத்தின் மதிப்பு ஒன்றைவிட அதிகமாக இருக்கும்பொழுது எடுத்துக்கொண்ட எடுகோளை ஏற்கத் தகாதெனத் தள்ளலாமா (reject) என்பதை முடிவு செய்ய வேண்டும். S'^2_M/S_P^2-ன் மதிப்பு வாய்ப்புக் காரணங்களிஞலும் (chance factors) ஒன்றைவிட அதிகமாக இருக்கலாம். ஆகவே, ஒன்றைவிட எவ்வளவு அதிகமாக இருந்தால் கூட்டிடை களிடையே உள்ள உண்மையான வேறுபாடுகளிஞல் அது ஏற்பட்டது எனக் கொண்டு, எடுகோளைத் தள்ளவேண்டும் என்பதனை நிர்ணயிக்கவேண்டும். அதன் பொருட்டு $S_M'^2/S_P^2$ என்ற விகிதம் எவ்வாறு பரவியுள்ளது எனக் காண்கிறோம். எடுத்துக்கொண்ட எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும்பொழுது,

$$\frac{\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{S^2},$$ $(N-1)$ வரையற்ற பாகை

களுடன் X^2 ஆகப் பரவியுள்ளது; $$\frac{\sum_i \sum_j (x_{ij} - x_i)}{\sigma^2} = \frac{S_1^2}{\sigma^2},$$

$(N-m)$ வரையற்ற பாகைகளுடன் X^2-ஆகப் பரவியுள்ளது.

எனவே, S'^2_M/S_P^2 என்ற விகிதம், எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும்பொழுது, $(m-1)$, $(N-m)$ வரையற்ற பாகைகளுடன் F-ஆகப் பரவியுள்ளது. எடுகோளைச் சோதனையிட, தரப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு $S'^2_M / S_P^2 = F$ கணக்கிட்டு, $(m-1)$, $(N-m)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட கோட்பாட்டியலான F (Theoretical F) உடன் ஒப்பிடுகிறோம்.

$S'^2_M / S_P^2 = F \geq F\alpha$, $(m-1), (N-m)$ ஆக இருந்தால் எடுகோளை ஏற்கத்தகாதெனத் தள்ளுகிறோம் (reject). இதில் α: பொருளுடை மட்டம் (level of significance). கணக்கிடப்பட்ட F மதிப்பு கோட்பாட்டியலான F மதிப்பைவிடக் குறைவாக இருந்தால், எடுகோளை ஒத்துக்கொள்ளலாம். (may accept).

ஒருவழிப் பாகுபாட்டின் முக்கிய கூறுகள்

தற்கோள்: மாதிரிகள், சமமான மாறுபாடுகளைக் கொண்டு ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_m^2 = \sigma^2$) இயல் நிலையில் பரவியுள்ள முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து ராண்டம் முறையில் எடுக்கப் பட்டவை.

எடுகோள்: மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதிகளின் கூட்டிடைகள் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை. அதாவது,

$$H_o : \mu_1 = \mu_2 = \ldots\ldots = \mu_m$$

மேற்கூறிய தற்கோளின் கீழ், எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது,

$$\frac{\text{மாதிரிகளினிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி}}{\text{மாதிரிகளினகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி}}$$

என்ற விகிதம் F ஆகப் பரவியுள்ளது. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து F-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு, F-அட்டவணையிலிருந்து பெறப்பட்ட $F\alpha, _{(m-1), (N-m)}$ உடன் ஒப்பிட்டு $F \geq F\alpha, _{(m-1), (N-m)}$ ஆக இருந்தால் எடுகோள் தள்ளப்படுகின்றது.

கணக்கிடும் முறை: முதலில் மாறுபட்ட அளவுகளைக் (size) கொண்ட மாதிரிகளின் கூட்டிடைகளைச் சோதிக்கலாம். கீழே தரப்பட்ட A, B, C, D என்ற நான்கு மாதிரிகளின் கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் உள்ளனவா என்று சோதிக்கும் முறையைக் கண்டோம்.

அட்டவணை 3.1.7. மாதிரிகள்

	A	B	C	D	
	64	46	65	76	
	74	57	51	60	
	66	45	70	55	
	54	65	54	72	
	79	58		80	
	76			70	
	70			57	
				73	
				78	
மொத்தம்	483	271	240	621	1615 மொத்தக் கூட்டுத் தொகை
கூட்டிடை	69.00	54.20	60.00	69.00	64.60 பொதுக் கூட்டிடை

எடுகோள்: ஐந்து மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதிகளின் கூட்டிடைகள் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை.

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$$

இந்த எடுகோளைச் சோதிக்கப் பின்வருமாறு கணக்கிட்டு பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணையை அமைக்கிறோம்.

(1) சரியீட்டளவு $= \dfrac{T^2}{N} = \dfrac{1615^2}{25}$

$$= \frac{2608225}{25} = 104329.00$$

(2) $\sum_i \sum_j x_{ij}^2 = 64^2 + 74^2 + \dots\dots + 73^2 + 78^2$

$$= 106929.00$$

(3) $\sum \dfrac{T_i^2}{ni} = \dfrac{483^2}{7} + \dfrac{271^2}{5} + \dfrac{240^2}{4} + \dfrac{621^2}{9}$

$$= 105264.00$$

(4) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\Big\} = S = (2) - (1) = 2600.00$

(5) மாதிரிகளினிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\Big\} = S = (3) - (1) = 935.20$

(6) மாதிரிகளினகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\Big\} = S_1 = (4) - (5) = 1664.80$

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

அட்டவணை 3.1.8.

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைச் சராசரி	கணக்கிடப்பட்ட F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு
மாதிரிகளினிடையே	3	935.20	311.73	3.93	5% 3.07
மாதிரிகளினகத்தே	21	1664.80	79.28		
மொத்தம்	24	2600.00			

கணக்கிடப்பட்ட F மதிப்பு, அட்டவணை F மதிப்பைவிட 5 சதவீத மட்டத்தில் அதிகமாக உள்ளது. எனவே, மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதிகளின் கூட்டிடைகள் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை என்ற எடுகோள் தள்ளப்படுகின்றது. கூட்டிடைகளுக்கிடையே உண்மையில் வேறுபாடுகள் உள்ளன என்ற முடிவிற்கு வருகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு *II*: சம அளவுகளுள்ள ஐந்து மாதிரிகளின் கூட்டிடைகளிடையே உண்மையில் வேறுபாடுகள் உள்ளனவா என்பதைச் சோதித்துப் பார்ப்போம்.

அட்டவணை 3 1.9. மாதிரிகள்

	A	B	C	D	E	
	72	71	64	54	65	
	75	76	66	61	63	
	68	64	73	67	73	
	81	72	68	55	59	
	76	73	51	70	61	
	58	53	67	51	51	
மொத்தம்	430	409	389	358	372	1958 மொத்தக் கூட்டுத் தொகை
கூட்டிடை	71.67	68.17	64.83	59.67	62.00	65.27 பொதுக் கூட்டிடை

எடுகோள்: ஐந்து மாதிரிகள் சமமான கூட்டிடைகளைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை.

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5.$$

கணக்கீடுகள்

(1) சரியீட்டளவு $= \dfrac{T^2}{N} = \dfrac{1958^2}{30} = \dfrac{3833764}{30}$

$$= 127792.13$$

(2) $\sum \sum_{j} x_{ij}^2 = 72^2 + 75^2 + \dots\dots + 61^2 + 51^2$

$= 129842$

(3) $1/n \sum T_i^2 = \dfrac{430^2 + 409^2 + 389^2 + 358^2 + 372^2}{6}$

$= \dfrac{770050}{6} = 128341.67$

(4) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\left.\right\} = S = (2) - (1) = 2049.87$

(5) மாதிரிகளினிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\left.\right\} = S_2 = (3) - (1) = 549.54$

(6) மாதிரிகளினகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\left.\right\} = S_1 = S - S_2$

$= (4) - (5)$

$= 1500.33$

இவற்றைப் பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

அட்டவணை-3.1.10. பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைச் சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு 5%
மாதிரிகளினிடையே	4	549.54	137.39	2.29	2.76
மாதிரிகளினகத்தே	25	1500.33	60.01		
மொத்தம்	29	2049.87			

கணக்கிடப்பட்ட F மதிப்பு, 5% பொருளுடைய மட்டத்தில் கோட்பாட்டியலான F மதிப்பைவிடச் சிறியதாக உள்ளது. எனவே, 5% பொருளுடைய மட்டத்தில் கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற முடிவிற்கு வருகிறோம். அதாவது, ஐந்து மாதிரிகள் சமமான கூட்டிடைகளைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை என்ற எடுகோளை ஒப்புக்கொள்கிறோம்.

இரு மாதிரிகள் மட்டும் இருக்கும் பொழுது பரவற்படி ஆய்வு

இரு மாதிரிகள் மட்டும் இருக்கும்பொழுது F–சோதனை t-சோதனைக்கு இணையானதாக உள்ளது (equivalent); $F = t^2$ என்ற தொடர்பு சரியாக அமைகின்றது. ஓர் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் இத்தொடர்பைச் சரிபார்ப்போம்.

அட்டவணை 3.1.11. **மாதிரிகள்**

	1	2	
	33	32	
	29	31	
	25	39	
	30	39	
	19	36	
	30	29	
	28	41	
	25	30	
	31	30	
	34	36	
மொத்தம்	284	343	627
கூட்டிடை	28.4	34.3	

கணக்கீடுகள்

$$\text{சரியீட்டளவு} = \frac{(627)^2}{20} = \frac{393129}{20}$$

$$= 19656.45$$

மாதிரிகளினிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{284^2 + 343^2}{10} - 19656.45$$

$$= 19830.50 - 19656.45$$

$$= 174.05$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= 33^2 + 29^2 + \ldots\ldots + 30^2 + 36^2 - 19656.45$$

$$= 20183.00 - 19656.45$$

$$= 526.55$$

மாதிரிகளினகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= 526.55 - 174.05$$

$$= 352.50$$

அட்டவணை 3.1.12.

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு 5%	1%
மாதிரிகளினிடையே	1	174.05	174.05	8.88	4.41	8.28
மாதிரிகளினகத்தே	18	352.50	19.58			
மொத்தம்	19	526.55				

$F = 8.8 > F_{.01, 1, 18} = 8.28$ ஆக இருப்பதால் கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுள்ளது என்ற முடிவிற்கு வருகிறோம்.

இனி 't'-ன் மதிப்பைக் காண்போம்.

அட்டவணை 3.1.13

மாதிரி I	மாதிரி II
39	32
29	31
25	39
30	39
19	36
30	29
28	41
25	30
31	30
34	36
மொத்தம் 284	343

$\sum x^2$ 8242 11941

$(\sum x)^2/n$ 8065.6 11764.9

$\sum (x - \bar{x})^2$ 176·4 176.1

$$\left.\begin{array}{r}\text{ஒன்று சேர்க்கப்பட்ட}\\ \text{மாறுபாடு}\end{array}\right\} = \frac{176.4 + 176.1}{9 + 9}$$

$$= \frac{352 \cdot 5}{18}$$

$$s^2 = 19.58$$

முதல் மாதிரியின் கூட்டிடை $\bar{x}_1 = 28.4$ என்பதும் மாதிரிக்குரிய முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டிடை μ_1-ன் மதிப்பீடாகும். இதேபோல $x_2 = 34.3$ என்பது இரண்டாவது மாதிரியின் முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டிடை μ_2-ன் மதிப்பீடாகும். $\mu_1 = \mu_2$ என்ற எடுகோளைச் சோதனை செய்யக் கணக்கிட வேண்டிய t மதிப்பு,

$$t = \frac{\left| \overline{(x_1 - x_2)} - (\mu_1 - \mu_2) \right|}{S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} \text{ ஆகும்.}$$

இதில் $S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ என்பது $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$-ன் தரப்பிழை (Standard error) ஆகும்.

$$S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{2\ s^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 19 \cdot 5.8}{10}}$$

$$- \sqrt{3 \cdot 916} = 1.98.$$

$$t = \frac{|284 - 34 \cdot 3|}{1 \cdot 98}$$

$$= \frac{5.9}{1.98}$$

$$= 2 \cdot 98.$$

$$t_{\cdot 01, 18} = 2.875.$$

$$t = 2 \cdot 98 > t_{\cdot 01, 18}$$

எனவே, $\mu_1 = \mu_2$ என்ற எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுகிறது இனி,

$F = t^2$ ஆக உள்ளதா எனக் காணலாம்.

$F = 8.88.$

$t^2 = (2.98)^2 = 8.88.$

$F = t^2$ என்ற தொடர்பு பொருந்துகிறது.

ஒரு வழிப் பாகுபாட்டின் உருப்படிவங்கள்

நிலையான விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவம்–(முதல் உருப்படிவம்) (Fixed Effects Model 1)

ஒரு வழிப்பாகுபாட்டில் அடையும் முடிவுகளுக்கு என்ன விளக்கம் தரலாம் என்பதை இங்கு நோக்குவோம். அதன்

பொருட்டுத் தரப்பட்டுள்ள விவரங்களை ஆராயுமுன்பு, விவரங்களுக்குத் தகுந்த கணக்கியல் சார்ந்த உருப்படிவம் (Mathematical Model) தருவது நல்லது. அவ்வாறு உருப்படிவம் தரும் பொழுது மதிப்பிடும் விளைவுகளை வரையறுக்க முனைகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, A, B, C, D, E என்ற ஐந்துவகை மாட்டுத் தீவனங்கள் ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியே மாடுகளின் எடைகளில் ஏற்படுத்தும் மாறுதல்களைச் சோதனையிட ஒருவழிப் பாகுபாடு முறையைப் பயன் படுத்துவதாகக் கொள்வோம். எடைகளில் ஏற்படும் மாறுதல்கள் தீவனங்களின் விளைவுகளைக் (effects) குறிக்கின்றன. பயன்படுத்தப்படும் இவ்வைந்துவகைத் தீவனங்களிளின் விளைவுகளைப்பற்றி மட்டுமே அறியவேண்டியுள்ளது எனக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு வகைத் தீவனத்தையும் ஐந்தைந்து மாடுகளுக்கு ஒருகுறிப்பிட்ட காலத்திற்கு உணவாகத் தந்ததினல், அவற்றின் எடைகளில் ஏற்பட்ட மாறுதல்களைக் கீழ்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

அட்டவணை 3·1.14. தீவனங்கள்.

	A	B	C	D	E	
	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	x_{51}	
	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	x_{52}	
	x_{13}	x_{23}	x_{33}	x_{43}	x_{53}	
	x_{14}	x_{24}	x_{34}	x_{44}	x_{54}	
	x_{15}	x_{25}	x_{35}	x_{45}	x_{55}	
மொத்தம்	$T_{1.}$	$T_{2.}$	$T_{3.}$	$T_{4.}$	$T_{5.}$	T
கூட்டிடை	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}$

ஐந்துவகைத் தீவனங்களின் விளைவுகளைப் பற்றி மட்டுமே அறிய விரும்புகிறோம். அவ்வைந்து வகைத் தீவனங்களும் பரிசோதனையில்பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. பரிசோதனையின் முடிவுகள் இவ்வைந்துவகை தீவனங்களுக்கு மட்டுமே பொருந்தும். இவ்வாறு பயன்படுத்தப்பட்ட நடத்துமுறைகளுக்கு (தீவனங்கள்) மட்டுமே சோதனையின் முடிவுகள் பொருந்தும் எனக் கொள்வதால், இச் சோதனையை நிலையான விளைவுகள்

(fixed effects) கொண்டது எனக்கூறுகிறோம். எனவே, பயன் படுத்தப்படும் நடத்துமுறைகளுக்குமட்டுமே முடிவுகள் பொருந்துமாறு அமைக்கப்படும் சோதனைமுறை நிலையான விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவத்தைச் சார்ந்ததாகும். இவ் வுருப்படிவத்தில், அறிந்துகொள்ளப் பட வேண்டிய நடத்து முறைகள் யாவும் பயன்படுத்தப் படுகின்றன.

இனி இந்நிலையை விளக்கும் கணக்கியல் உருப்படிவத்தைக் காண்போம். ஒரு மாட்டின் எடையில் ஏற்பட்ட மாறுதல் இரு வகைப் பகுதிகளைக் (components) கொண்டதாய் உள்ளது. ஒரு பகுதி குறிப்பிட்ட ஒரு தீவனத்தினால் ஏற்பட்ட நிலையான விளைவு; மற்றது அத் தீவனத்தின் நிலையான விளைவிலிருந்து வேறுபட்டிருக்கும் ராண்டம் விளைவு (Random effect). ஒரு குறிப் பிட்ட தீவனத்தைப் பெறும் இரு மாடுகளின் எடை மாறுதல் களில், தீவனத்தினால் ஏற்படும் நிலையான விளைவுகள் ஒன்றுக் கொன்று சமமாக இருக்க, ராண்டம் விளைவுகள் மாறுபடுகின்றன. இவ்வாறு மாறுபட்டிருப்பதற்கான காரணங்கள் பலவாகும். மாடுகளின் உடற்கூறுகளில் உள்ள வேறுபாடுகள், தீவனங்களை மாடுகளுக்குத் தரும் முறையில் உள்ள வேறுபாடுகள், எடை களை அளப்பதில் உள்ளவேறுபாடுகள் என்பன அவற்றுள் சில. இவ் வேறுபாடுகளினால் ஏற்படும் விளைவுகளையே ராண்டம் விளைவு கள் என்கிறோம். ஒரு பரிசோதனையில், தெரிந்தும் தெரியா மலும் இருக்கின்ற ராண்டம் விளைவுகள் எண்ணற்றவையாகும். எனவே, இவ்விளைவுகளை ராண்டம் மாறிகளாகக் (Random vari-ables) கொள்வது பொருத்தமானதாகத் தெரிகின்றது. ஆகை யால், ராண்டம் விளைவுகள் பூச்சியம் கூட்டிடையையும், σ^2 மாறு பாட்டையும் கொண்டு இயல் நிலையில் பரவியுள்ளன எனக் கொள்கிறோம். இதற்கு இயைய, ஒரு குறிப்பட்ட மாட்டின் எடையில் ஏற்பட்ட மாறுதல் = ஒரு குறிப்பிட்ட தீவனத்தினால் ஏற்பட்ட நிலையான விளைவு + ராண்டம் விளைவு. எடுத்துக் காட்டாக, B நடத்துமுறையில் 3 ஆவது மதிப்பு,

x_{23} = B நடத்துமுறையில் ஏற்பட்ட நிலையான விளைவு + ராண்டம் விளைவு.

B நடத்துமுறையைக் கொண்ட எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ($x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}$) B நடத்துமுறையினால் ஏற்பட்ட நிலையான விளைவுகள் சமமாகும். ஆனால், ஒவ்வொரு மதிப்பிற்குமான ராண்டம் விளைவு வேறுபடுகின்றது. பொது விதியாக இத் தற்கோளைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

$$xij = \mu i + \epsilon ij$$

இதில்,

$xij = i$ ஆவது நடத்துமுறையக் கொண்ட j ஆவது மதிப்பு

$\mu i = i$ வது நடத்துமுறையின் நிலையான விளைவு.

$\epsilon ij =$ பூச்சியம் கூட்டுடையும் σ^2 மாறுபாடும் கொண்டு இயல் நிலையில் பரவியுள்ள ராண்டம் விளைவு.

μi ஐ மேலும் இருபிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

$\mu i = \mu + \alpha i$

இதில்,

μ = எல்லா நடத்துமுறைக்கும் பொதுவான விளைவு.

$\alpha i = i$ வது நடத்துமுறைக்கு மட்டுமான நிலையான விளைவு.

μ என்பதை எல்லா μi களின் சராசரியாகக் கொள்ளலாம்

அதாவது

$$\mu = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \mu i$$

αi என்பது μ-க்கும் μi-க்கும் உள்ள வேறுபாடு ஆகும்.

அதாவது

$$\alpha i = \mu i - \mu$$

எனவே, $$\sum_{i=1}^{m} \alpha i = \sum_{i=1}^{m} (\mu i - \mu)$$

$$= 0.$$

எனவே,

$$xij = \mu + \alpha i + \epsilon ij$$

xij, $\mu + \alpha i$ என்ற கூட்டிடையும் σ^2 என்ற மாறுபாட்டையும் கொண்டு இயல் நிலையில் பரவியுள்ளது.

ஒரு வழிப் பாகுபாட்டில் உள்ள மதிப்புகள் மூன்று பகுதிகளின் கூட்டுத் தொகையாக உள்ளதைப் பின்வரும் அட்டவணை விளக்குகின்றது.

அட்டவணை 3. 1. 15.

உருப்படிவத்திற்குகந்தவாறு அமைக்கப்பட்ட சோதனை

எல்லா நடத்து முறைகளுக்குமான பொது விளைவு $\mu = 40$

	A	B	C	D	E	
	$\alpha_1 = -10$	$\alpha_2 = -5$	$\alpha_3 = 7$	$\alpha_4 = 8$	$\alpha_5 = 0$	
	40 −10 8 $x_{11} = 38$	40 −5 1 $x_{21} = 36$	40 7 −3 $x_{31} = 44$	40 8 6 $x_{41} = 54$	40 0 −1 $x_{51} = 39$	
	40 −10 3 $x_{12} = 33$	40 −5 0 $x_{22} = 35$	40 7 5 $x_{32} = 52$	40 8 4 $x_{42} = 52$	40 0 −11 $x_{52} = 29$	
	40 −10 3 $x_{13} = 33$	40 −5 6 $x_{23} = 41$	40 7 −8 $x_{33} = 39$	40 8 −3 $x_{43} = 45$	40 0 −3 $x_{53} = 43$	
	40 −10 −3 $x_{14} = 27$	40 −5 −2 $x_{24} = 33$	40 7 3 $x_{34} = 50$	40 8 2 $x_{44} = 50$	40 0 −6 $x_{54} = 34$	
	40 −10 2 $x_{15} = 32$	40 −5 −5 $x_{25} = 30$	40 7 −6 $x_{35} = 41$	40 8 3 $x_{45} = 51$	40 0 3 $x_{55} = 43$	
மொத்தம்	163	175	226	252	188	$T = 1004$
சூட்டிடை	32.6	35.0	45.2	50.4	37.6	$\bar{x} = 40.16$

இவ் வட்டவணையில் ஒவ்வோர் அறையிலும் (cell) முதலில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது பொது விளைவு μ. இரண்டாவதாக நடத்து முறையின் விளைவான α_i-ம், மூன்றாவதாக ராண்டம் விளைவான E_{ij}-ம் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இவ் வுருப் படிவத்தின் படி x_{ij} என்பது இம் மூன்றின் கூட்டுத் தொகையாகும். நடத்து முறை விளைவுகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியத்திற்குச் சமமாக இருப்பதையும், அறைக்கு அறை ராண்டம் விளைவு வேறுபடுவதையும் காணலாம்.

சோதனையின் நோக்கம் நடத்துமுறைகள் ஒரே அளவு விளைவுகள் கொண்டனவா என்பதை அறிவதாகும். அதாவது α_i-ன் மதிப்புகள் m நடத்து முறைகளிலும் சமமாக உள்ளனவா என்பதைச் சோதிப்பதே சோதனையின் எடுகோளாக அமைகின்றது. α_i-கள் சமமாக இருப்பின், அவை யாவும் தனித்தனியே பூச்சியத்திற்குச் சமமாக இருக்கும். ஏனெனில்,

$$\sum_i \alpha_i = 0$$

எனவே சோதிக்கப்படும் எடுகோள்,

$$H: \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_m = 0$$

எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும்பொழுது, நடத்து முறை களகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி (Within treatments mean sum of squares), முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2ன் மதிப்பீடாகும். அதாவது, நடத்து முறை களகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரியைக் குறிக்கும். $S^2{}_P$ன் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு (expected value) σ^2 ஆகும். அதாவது,

$$E\,(S^2{}_P) = \sigma^2.$$

எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும்பொழுது, நடத்து முறைகளினிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி $S'^2{}_M$, முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2ன் மதிப்பீடாகும். எனவே,

$$E\,(S'^2{}_M) = \sigma^2.$$

எடுகோள் உண்மையாக இல்லாத போதும்,

$$E\,(S^2{}_p) = \sigma^2.$$

ஆனால், எடுகோள் உண்மையாக இல்லாதபோது,

$$E(S'^2_M) = \sigma^2 + \frac{n}{m-1}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2$$

$\frac{n}{m-1} \sum_{i=1}^{m} \alpha^2_i$ என்பது நடத்து முறைகளின் விளைவுகள் வேறு படுவதால் ஏற்பட்ட மாறுபாட்டுப் பகுதியாகும்.

ஆகவே, S'^2_M/S^2_P என்ற விகிதத்தைக் கணக்கிட்டு அது ஒன்றைவிட பொருளுள்ள வகையில் அதிகமாக இருந்தால், எடு கோள் தவறு எனக் கொண்டு தள்ளப்படுகின்றது.

S'^2_M/S^2_P-ன் பரவல், $F_{m-1}, N-m$ என முன்பே பார்த்தோம். பொருளுடைய மட்டம் α சதவீதத்தில், $(m-1)$, $(N-m)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட கோட்பாட்டியலான F-ன் மதிப்பை விட S'^2_M/S^2_P-ன் மதிப்பு அதிகமாக இருந்தால், எடுகோள் ஏற்கத் தகாதெனத் தள்ளப்படுகிறது.

உருப்படிவத்திற்குத் தகுந்தவாறு அமைக்கப்பட்ட சோதனையின் ஆய்வு:

கணக்கீடுகள்:

(1) சரியீட்டளவு $= \frac{1004^2}{25} = 40320.64$

(2) $\sum_i \sum_j x^2_{ij} = 38^2 + 33^2 + \dots + 34^2 + 43^2$

$= 41870.00$

(3) $\sum_i T^2_{i\cdot} = 163^2 + 175^2 + 226^2 + 252^2 + 188^2$

$= 207118$

(4) $\frac{1}{n}\sum_i T^2_{i\cdot} = \frac{207118}{5} = 41423.60$

(5) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sum_i \sum_j x^2_{ij} - \frac{T^2}{N}$$

$$= (2) - (1)$$

$$S = 1549.36$$

(6) நடத்து முறைகளிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\left.\right\} = S_2 = \frac{1}{n}\sum T^2_{i\cdot} - \frac{T^2}{N}$

$$= (4) - (1)$$

$$= 1102.96.$$

(7) நடத்து முறைகளகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\left.\right\} = S_1 = S - S_2$

$$= (5) - (6)$$

$$= 446.40$$

மதிப்புகளின் ஆதியை (origin) மாற்றுவதால் கணக்கீட்டின் முடிவுகள் மாற்றமடையாது. எனவே, இங்கு ஆதியை 40-க்கு மாற்றிக்கொண்டு கணக்கீடுகள் செய்வது மிகவும் எளிதாக இருக்கும்.

அட்டவணை 3.1.16

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்.	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு
நடத்து முறைகளினிடையே	4	1102·96	275·74	12·35	1% 4·43. 5% 2·87
நடத்து முறைகளினகத்தே	20	446·40	22·32		
மொத்தம்	24	1549·36			

சோதிக்கப்படும் எடுகோள்:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$$

அதாவது நடத்து முறைகளின் நிலையான விளைவு களிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோளைச் சோதிக்கிறோம்.

$\frac{S'^2_M}{S^2_P} = F = 12{\cdot}35 > F_{.01, 4, 20} = 4{\cdot}43$ ஆக இருப்பதால், எடுகோள் தள்ளப்படுகிறது(rejected). எனவே, நடத்து முறைகளிடையே வேறுபாடுகள் உள்ளன என்ற முடிவு ஏற்படுகின்றது.

E (நடத்து முறைகளகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி) $= E\,(S^2_P)$

$$E\,(S^2_P) = \sigma^2$$

அதாவது S^2_P, முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டை மதிப்பிடுகின்றது.

$S^2_P = 23{\cdot}32$, முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2 ஐ மதிப்பிடுகின்றது.

E (நடத்து முறைகளிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை) $= E\,(S'^2_M)$.

$$E\,(S'^2_M) = \sigma^2 + \frac{n}{m-1} \sum_i \alpha^2_i$$

அதாவது S'^2_M, $\sigma^2 + \frac{n}{m-1} \sum_i \alpha^2_i$ யை மதிப்பிடுகின்றது.

$\frac{S'^2_M - S^2_P}{n}$ என்பது நடத்து முறைகளின் மாறுபாடு $\frac{1}{m-1} \sum \alpha^2_i$ ஐ மதிப்பிடுகின்றது.

$$\frac{S'^2_M - S^2_P}{n} = \frac{275{\cdot}74 - 22{\cdot}32}{5} = \frac{253{\cdot}42}{5}$$

$$= 50{\cdot}68$$

$$\frac{1}{m-1} \sum_i \alpha^2_i = \frac{1}{4} [\,0^2 + (-5)^2 + 7^2 + 8^2]$$

$$= \frac{238}{4} = 59.50$$

எனவே, 50·68 என்பது 59.50 என்பதனை மதிப்பிடுகின்றது (estimates).

கூட்டிடைகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடுகளைச் சோதனை செய்தல்

இரண்டிற்கு மேற்பட்ட நடத்து முறைகளைக் கொண்ட பரிசோதனைகளில் பரவற்படி முறைப்படி ஆய்வு நடத்திய பின்பு, எந்தெந்த கூட்டிடைகள் வேறுபடுகின்றன என்பதனை அறிய ஆய்வாளர் விரும்பலாம். எல்லா கூட்டிடைகளையும் ஆராய்ந்து அவற்றிற்கிடையே உள்ள வேறுபாடுகளில் எவை உண்மையானவை என அறிய பின்வரும் முறைகள் உள்ளன.

மீச்சிறு பொருளுடை வேறுபாட்டுச் சோதனை. (மீ.பொ.வே. சோதனை) [The least significant difference (L.S.D.) test.]

கூட்டிடைகளின் தொகுதியிலிருந்து இரண்டிரண்டு கூட்டிடைகளாக எடுத்து அவற்றிற்கு இடையே உள்ள வேறுபாட்டைச் சோதனைசெய்ய அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட கூட்டிடையுடன் மற்ற கூட்டிடைகளை ஒப்பிட்டு வேறுபாடுகளைச் சோதனை செய்ய மீ. பொ. வே. முறையைப் பயன்படுத்துகிறோம். மீ. பொ. வே. முறையில் இரு கூட்டிடைகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டின் தரப்பிழை பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

$$\left.\begin{array}{c}\text{இரு கூட்டிடைகளுக்கிடையேயுள்ள}\\ \text{வேறுபாட்டின் தரப்பிழை}\end{array}\right\} = \sqrt{\frac{2s^2}{n}}$$

இதில்,

s^2 = நடத்து முறைகளினகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி. (பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி.)

n = ஒவ்வொரு பிரிவிலும் (ஒவ்வொரு நடத்து முறையிலும்) உள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை.

இதைப் பயன்படுத்தி, மீ. பொ. வே. பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றது:

$$\left.\begin{array}{r}\text{மீச்சிறு பொருளுடை வேறுபாடு}\\ \text{(மீ. பொ. வே.)}\end{array}\right\} = \sqrt{\frac{2s^2}{n}} \times t_{.05,\ N-m}.$$

இதில், $t_{.05},\ N-m$ என்பது பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குரிய வரையற்ற பாகைகளான (N-m)-க்குரிய 5 சதவீத மட்டத்தில் உள்ள t-ன் மதிப்பு. கூட்டிடைகளுக்கிடையே உள்ள எல்லா வேறுபாடுகளும் இதனுடன் ஒப்பிடப்பட்டு, வேறுபாடு இதைவிட அதிகமாக இருப்பின், கூட்டிடைகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு பொருளுடைய வகையில் உள்ளன எனக் கொள்ளப்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டாக, உருப் படிவத்திற்குத் தகுந்தவாறு அமைக்கப்பட்ட சோதனையின் கூட்டிடைகளுக்கு மீ. பொ. வே. ஐப் பயன் படுத்தலாம். அப் பரிசோதனையின் கூட்டிடைகள்:

நடத்து முறைகள்	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
கூட்டிடைகள்	32.6	35·0	45·2	50·4	37·6

$$\left.\begin{array}{r}\text{இரு கூட்டிடைகளுக்கிடையேயுள்ள}\\ \text{வேறுபாட்டின் தரப்பிழை}\end{array}\right\} = \sqrt{\frac{2s^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\times 22.32}{5}}$$

$$= \sqrt{8.928}$$

$$= 2.99$$

20 வரையற்றபாகைகள் கொண்ட 5 சதவீத t மதிப்பு- $t_{05, 20}$ $\Big\{$ = 2.086

=2.99× 2·086

எனவே, மீ.பொ.வே.

= 6.24

குறிப்பிட்ட இரு கூட்டிடைகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடு 6.24ஐ விட அதிகமாக இருந்தால், வேறுபாடு 5 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இருக்கின்றனது எனப்படும்.

கூட்டிடைகளில் மிக அதிக மதிப்பைக் கொண்டது நடத்து முறை D – க்குரிய கூட்டிடையாகும். இதன் மதிப்பு 50.4. இதற்கும், மிகக்குறைந்த மதிப்பைக்கொண்ட A–ன் கூட்டிடை 32.6.–க்கும் உள்ள வேறுபாடு 17.8. இவ்வேறுபாடு மீ. பொ. வேஐவிட அதிகமாக உள்ளதால், D-ன் கூட்டிடை A–ன் கூட்டிடையைவிட பொருளுடையவகையில் அதிகமாக உள்ளது எனவாகின்றது. அடுத்து C, E ஆகியவற்றின் கூட்டிடைகளை ஒப்பிட்டுப்பார்க்க விரும்பினால், அவற்றின் வேறுபாடு 45·2-37·6 =7.6, பொருளுடையவகையில் உள்ளதைக் காணலாம். இதேபோல, விரும்பும் எந்த இரு கூட்டிடைகளையும் மீ.பொ.வே ஐக் கொண்டு ஒப்பிடலாம். இவ்வாறே, ஏதாவது இருகூட்டிடைகளின் வேறுபாட்டிற்கான 95 சதவீத நம்பிக்கை எல்லைகளை (confidence limits), வேறுபாடு± மீ·பொ.வே தருகின்றது. எடுத்துக்காட்டாக, C, E நடத்துமுறைகளின் கூட்டிடைகளின் வேறுபாட்டிற்கான நம்பிக்கை எல்லைகள் = (7.6–6·24, 7.+6·24) = (1.36, 13·84). இதேபோல, எந்த இரு கூட்டிடைகளுக்கான நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காணலாம்.

முக்கியத்துவச் சோதனைகளில் மீ. பொ. வேஐப் பாகுபாடற்ற முறையில் பயன் படுத்துதல் கூடாது. சோதனை செய்யப்படுவதற்கு முன்பு எந்தெந்த கூட்டிடைகளை ஒப்பிட வேண்டும் என்பதை முடிவு செய்யப்பட்டிருக்கும்பொழுது மீ.பொ.வே. சிறந்ததாகும். ஆனால் எல்லாக் கூட்டிடைகளையும் ஒப்பிட்டுப்பார்க்க வேண்டியிருந்தால் மீ.பொ.வே. சிறந்த முறை எனக்கூறுவதற்கில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, 5 கூட்டிடைகளை ஒப்பிட்டுப்பார்க்க, இரண்டு இரண்டாகப் பத்து ஒப்புமைகள் (comparisons) உள்ளன. இந்த 10 ஒப்புமைகளில் குறைந்தது ஒன்று மீ.பொ.வே ஐ விட அதிகமாக இருக்க நிகழ்திறம் .05 ஐ

விட அதிகமாக உள்ளது. இந்த நிகழ்திறத்தின் அளவு ஏறக் குறைய (approximately) 0.27 எனக் கணக்கிடலாம். ஒப்பிட வேண்டிய கூட்டிடைகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக அதிக மாக, இந்த நிகழ்திறத்தின் மதிப்பும் அதிகமாகின்றது. அதிக எண்ணிக்கையிலான கூட்டிடைகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும் பொழுது, முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டிடைகள் சமமாக இருப் பினும், பொருளுடையதாகத் தோன்றும் ஒப்புமைகள் சிலவற் றைப் பெரும்பாலும் காணலாம். அதனால் தவறான முடிவுகளுக்கு வரவாய்ப்பு ஏற்படுகின்றது. அதனால்தான், 'Z-சோதனை (F-சோதனை) முக்கியத்துவத்தை (significance) வெளிப்படுத்த வில்லை எனில், குறிப்பிட்ட ஒப்புமைகள் பொருளுடையன எனக் கூறுவதில் மிகுந்த எச்சரிக்கைவேண்டும்' என ஃபிசர் கூறுகிறார். இதன்படி, F பொருளுடைதயாய் இருக்கும் பொழுதுதான் மீ.பொ.வே. முறையைப் பயன் படுத்தவேண்டும் எனக் கூறப் படுகின்றது.

ஸ்டூடண்ட் - நியூமன் - கௌல்ஸ் சோதனை

பல கூட்டிடைகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க, மீ. பொ. வே. சோதனைக்குப் பதிலாகப் பயன்படுத்தப்படும் முறை ஸ்டூடண்டைசுடு வீச்சு (Studentized Range) அட்டவணை யைக் கொண்டு சோதனையிடும் முறையாகும். ஸ்டூடண்டைசுடு வீச்சு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது:

$$\text{ஸ்டூடண்டைசுடு வீச்சு } Q_{\alpha,\ a} = \frac{\bar{x}_{max} - \bar{x}_{min}}{s_{\bar{x}}}$$

இதில்,

α = Q-ன் சதவீதமட்டம்.

a = நடத்துமுறைகளின் எண்ணிக்கை.

$\bar{x}_{max}$. = நடத்துமுறைகளின் கூட்டிடைகளில் மிகப் பெரியது (largest).

$\bar{x}_{min}$. = நடத்துமுறைகளின் கூட்டிடைகளில் மிகச் சிறியது (smallest).

$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ = ஒவ்வொரு கூட்டிடைக்குமான தரப்பிழை.

ஒவ்வொரு நடத்துமுறையிலும் உள்ள மதிப்புகளின் எண் ணிக்கை n. ஜாய்ஸ் எம். மே. என்பவரால் கணிக்கப்பட்ட ஸ்டூட்ண்டைசுடு வீச்சு Q-ன் மேல் 5 சதவீத மதிப்புகளைத் தரும்

அட்டவணை ஜார்ஜ் டபிள்யூ ஸ்னெடகரும், வில்லியம். ஜி.காக்ரனும் எழுதியுள்ள புள்ளியியல் முறைகள் (Statistical Methods) என்னும் நூலில் தரப்பட்டுள்ளது (அட்டவணை *A* 15). அவ்வட்டவணையில் f என்பது பிழைமாறுபாட்டிற்கான (பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை சராசரி) வரையற்ற பாகைகளைக் குறிக்கின்றது. நடத்துமுறைகளின் எண்ணிக்கையான 'a' ஐ-'f' ஐயும் கொண்டு அட்டவணையிலிருந்து $Q_{\cdot 05, a}$-ன் மதிப்பைப் பெறலாம். ஏதாவது இரு கூட்டிடைகளின் வேறுபாடு $Q_{05, a} \cdot s_{\bar{x}}$ ஐ விட அதிகமாக இருந்தால், வேறுபாடு பொருளுடைய வகையில் (சதவீத மட்டத்தில்) இருக்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டில், $f = 20$; $a = 5$.

அட்டவணையில் இருந்து, $Q_{\cdot 05, 5} = 4.24$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{22 \cdot 32}{5}}$$

$$= 2 \cdot 11$$

எனவே,

$$Q_{\cdot 05, a} s_{\bar{x}} = 4 \cdot 24 \times 2 \cdot 11$$

$$= 8.95$$

A-ன் கூட்டிடைக்கும், *D*-ன் கூட்டிடைக்கும் உள்ள வேறுபாடு 17·8. இந்த முறையிலும் 5 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இருக்கின்றது. ஆனால், *C*-ன் கூட்டிடைக்கும் *E*-ன் கூட்டிடைக்கும் உள்ள வேறுபாடு 7·6. இந்த முறையில் 5 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இல்லை. எனவே, ஸ்டூடண்டைசுடு வீச்சு முறையில் பொருளுடையதாக இருப்பதற்குக் கூட்டிடைகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடு மீ.பொ.வே. முறைக்கானதைவிட அதிகமாக இருக்க வேண்டும். இரண்டு கூட்டிடைகள் மட்டும் இருக்கும்பொழுது இரு முறைகளும் ஒன்றாகவே உள்ளன. சில கூட்டிடைகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடுகளை அல்லது எல்லாக்கூட்டிடைகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடுகளைச் சோதனையிடும்பொழுது, பொருளுடையது எனத் தவறாகக் கூறாமல் இருப்பதற்கான நிகழ் திறம், மீ.பொ.வே. முறையில் இருப்பதைப் போலன்றி, ஸ்டூடண்டைசுடு வீச்சு முறையில் $\geq \cdot 0 \cdot 95$. ஆனால், மீ.பொ.வே. முறையை

விடச் சிறுபான்மையான உண்மையான வேறுபாடுகளையே இம் முறையில் காண இயலுகின்றது.

இம் முறையைப் பயன்படுத்தி இரு கூட்டிடைகளின் வேறுபாட்டிற்கான நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காணலாம். $\bar{x}_i$, $\bar{x}_j$ என்ற இரு கூட்டிடைகளின் வேறுபாட்டிற்கான 95% நம்பிக்கை எல்லைகள்,

$$(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \pm Q_{\cdot 05, a}$$

இது போன்ற எல்லா நம்பிக்கை எல்லைகளும், முழுமைத் தொகுதியின் வேறுபாடு $(\mu_i - \mu_j)$ஐச் சரியாகக் கொண்டிருக்க நிகழ்திறம் 0·95. ஆனால் இந்த முறையில் நம்பிக்கை இடைவெளிகள் (Confidence intervals) மீ. பொ. வே. முறையிலுள்ளதைவிடப் பரந்ததாக (wider) இருக்கின்றன.

ஸ்டூடண்டைசுடு Q முறையைப் போல பாதுகாப்பும், அதே சமயத்தில், உண்மையான வேறுபாடுகளை Q முறையைவிட அதிக சமயங்களில் காணும் சக்தியும் கொண்ட முறை Q முறையைத் தொடர் முறையாக அமைக்கப்பட்டதாகும். முதலில் கூட்டிடைகளை ஏறு வரிசையில் அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

A	B	E	C	D
32·6	35.0	37·6	45·2	50·4

இக் கூட்டிடைகளின் தொகுதியில் மிகப் பெரியதற்கும், மிகச் சிறியதற்கும் உள்ள வேறுபாடு பொருளுடைய வகையில் உள்ளதா என முதலில் சோதிக்க வேண்டும். வேறுபாடு பொருளுடைய வகையில் இல்லையெனில், எல்லாக் கூட்டிடைகளுக்குமிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற முடிவு இம் முறையின்படி ஏற்படுகின்றது. வேறுபாடு பொருளுடைய வகையில் இருந்தால், நான்கு நான்கு கூட்டிடைகளாக எடுத்துக்கொண்டு, தொடர்ந்து பின்வருமாறு சோதனை செய்ய வேண்டும். ஐந்து கூட்டிடைகளுக்கு முன்பே பார்த்தவாறு,

$$Q_{\cdot 05, 5} \; s_{\bar{x}} = 8{\cdot}95.$$

A–ன் கூட்டிடைக்கும், D-ன் கூட்டிடைக்கும் உள்ள வேறுபாடு $= 17{\cdot}8$

17.8 > 8.95. எனவே, இவ்விரண்டு கூட்டிடைக்கும் இடையே வேறுபாடு பொருளுடைய வகையில் இருக்கின்றது. ஆகவே, மேலும் தொடர்ந்து சோதனையிட, ஐந்து கூட்டிடை

களின் தொகுதியிலிருந்து நான்கு நான்கு கூட்டிடைகள் கொண்ட தொகுதிகள் கீழே காட்டியபடி எடுக்கப்படுகின்றன.

A	*B*	*E*	*C*	*D*
32.6	35.0	37.6	45.2	50.4

அதாவது, *A*, *B*, *E C* நான்கும் ஒரு தொகுதி; *B*, *E*, *C*, *D* என்பன மற்றொரு தொகுதி. இவ்விரு தொகுதிகளும் தனித் தனியே சோதிக்கப்படுகின்றன. முதலில் *A*, *B*, *E*, *C* ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

A	*B*	*E*	*C*
32.6	35.0	37.6	45.2

இதற்கான *Q*-ன் மதிப்பை அட்டவணையிலிருந்து பெற $a = 4$ எனவும் $f = 20$ எனவும் கொள்ள வேண்டும்.

$$\therefore \quad Q_{.05, 4} = 3.96$$

$$Q_{.05, 4} \times s_{\bar{x}} = 3.96 \times 2.11 = 8.36$$

A, *C* கூட்டிடைகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு 12.6, 8.36ஐ விட அதிகமாக இருப்பதால், வேறுபாடு பொருளுடைய வகையில் இருக்கின்றது. எனவே, மறுபடியும் *A*,*B*,*E*; *B*, *E*, *C* என கூட்டிடைத் தொகுதிகளை எடுத்துக்கொண்டு $a = 3$; $f = 20$ எனக்கொண்டு சோதிக்க வேண்டும். மற்றொரு தொகுதியான,

B	*E*	*C*	*D*
35.0	37.6	45.2	50.4-ல்,

B, *D* கூட்டிடைகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு 15.4, 8.36ஐ விட அதிகமாக இருப்பதால், வேறுபாடு பொருளுடைய வகையில் உள்ளது. எனவே, *B*, *E*, *C*; *E*, *C*, *D* என்ற தொகுதிகளை எடுத்துக்கொண்டு சோதிக்க வேண்டும்.

A, *B*, *E* என்ற தொகுதியைச் சோதனையிட:

A	*B*	*E*
32.6	35.0	37.6

$$Q_{.05, 3}\ s_{\bar{x}} = 3.58 \times 2.11 = 7.55$$

A, E கூட்டிடைகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடு 5.0, 7.55ஐ விடக் குறைவாக இருப்பதால், வேறுபாடு பொருளுடையதாக இல்லை. எனவே, *A, B, E* என்ற கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை.

B, E, C என்ற தொகுதியைச் சோதனையிட:

B	*E*	*C*
35.0	37.6	45.2

B, C கூட்டிடைகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடு 10.2, 7.55ஐ விட அதிகமாக இருப்பதால், வேறுபாடு பொருளுடையதாக இருக்கின்றது. எனவே, *B, E* என்ற கூட்டிடைகளையும், *E, C* என்ற கூட்டிடைகளையும் $a = 2$ எனக் கொண்டு சோதிக்க வேண்டும்.

E, C, D என்ற தொகுதியைச் சோதனையிட,

E	*C*	*D*
37.6	45.2	50.4

E, D கூட்டிடைகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடு 12.8, 7.55ஐ விட அதிகமாக இருப்பதால், வேறுபாடு பொருளுள்ள வகையில் உள்ளது. எனவே அடுத்து, *E, C* கூட்டிடைகளையும் *C, D* கூட்டிடைகளையும் சோதிக்க வேண்டும்.

இனி, *B,E*; *E,C*; *C,D* என்ற கூட்டிடைத் தொகுதிகளைச் சோதனையிட,

$$Q_{.05, 2}\ s_{\bar{x}} = 2.95 \times 2.11 = 6.22$$

B, E கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடு = 2.6

E, C கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடு = 7.6

C, D கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடு = 5.2

B, E கூட்டிடைகளிடையே பொருளுடைய வகையில் வேறுபாடு இல்லை; *C, D* கூட்டிடைகளிடையே பொருளுடைய

வகையில் வேறுபாடு இல்லை; E, C கூட்டிடைகளிடையே பொருளுடைய வகையில் வேறுபாடு இருக்கின்றது.

எனவே, A, D; A, C; B, D; B, C; E, D; E, C என்ற தொகுதிகளில் வேறுபாடுகள் பொருளுடைய வகையில் உள்ளன.

இந்த முறையில், ஒரு கூட்டிடைகளின் தொகுதியில் மிகப் பெரியதும் மிகச் சிறியதுமான கூட்டிடைகளுக்கிடையே வேறு பாடு இல்லையெனில், அத் தொகுதியிலுள்ள எல்லாக்கூட்டிடை களிடையேயும் வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற முடிவு ஏற்படு கின்றது.

ராண்டம் விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவம்
(இரண்டாவது உருப்படிவம்) [Random Effects Model. (Model II)]

நிலையான விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவத்தில் ஆராயப் படவேண்டிய நடத்து முறைகள் அனைத்தும் பரிசோதனையில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. பரிசோதனையின் முடிவுகள் பயன் படுத்தப்பட்ட நடத்து முறைகளைப் பற்றி மட்டுமே அமை கின்றன. ஆனால் எல்லாப் பரிசோதனைகளிலும் ஆராயப்பட வேண்டிய நடத்துமுறைகள் அனைத்தையும் ஈடுபடுத்த இயலும் என எதிர்பார்க்கமுடியாது. அவ்வாறு நடத்து முறைகள் அனைத்தையும் பயன்படுத்த இயலாதபோது, நடத்து முறை களின் முழுமைத் தொகுதி (population of treatments) சில நடத்து முறைகள் ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு, அவை பரிசோதனையில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இப் பரிசோதனையின் முடிவுகள் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அனைத்து நடத்து முறைகளுக்கும் அனுமானிக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறுனப் பரிசோதனைகள் இரண்டாவது உருப்படியான ராண்டம் விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவத்தைச் சார்ந்தன வாகும். இவ் வுருப்படிவத்திற்கு விளக்கமாகப் பின்வரும் சோதனையைக் காண்போம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட தீவனத்தை ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குத் தீனியாகத் தரும்பொழுது, எருதுகளின் எடைகளில் ஏற்படும் அதிகரிப்புகளை (gains in weights) ஆராய சோதனையை ஒரு வழிப் பாகுபாட்டில் அமைக்கலாம். தீவனத்தின் விளைவை அறிய எல்லா இன எருதுகளையும் பரிசோதனையில் ஈடுபடுத்த

வேண்டும். இனங்களின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாக இருப்பதால், எல்லா இனங்களையும் சேர்ந்த எருதுகளைப் பரிசோதனையில் ஈடுபடுத்துதல் என்பது இயலாது. எனவே, இனங்களின் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ராண்டம் முறையில் எடுக்கப்பட்ட m இனங்களைக் கொண்டு பரிசோதனை நடத்தப்படுகின்றது. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒவ்வோர் இனத்திலும் n எருதுகள் பயன்படுத்தப்பட்டால், ஒரு வழிப் பாகுபாட்டில் அமைந்த இச் சோதனையில் $m\ n$ மதிப்புகள் m பிரிவு (இனங்கள்) களாக உள்ளன.

அட்டவணை 3.1.17. **இனங்கள்**

	1	2	...	i	...	m	
	x_{11}	x_{21}	...	x_{i1}	⋮	x_{m1}	
	x_{12}	x_{22}	...	x_{i2}	⋮	x_{m2}	
	⋮	⋮		⋮		⋮	
	x_{ij}	$x_{2\,j}$	...	x_{ij}	⋮	x_{mj}	
	⋮	⋮		⋮		⋮	
	x_{in}	x_{2n}	...	x_{in}	⋮	x_{mn}	
மொத்தம்	T_1	T_2	...	T_i	...	T_m	T
கூட்டிடை	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	...	$\bar{x}_i$	...	$\bar{x}_m$	$\bar{x}$

இப் பரிசோதனைக்குரிய கணக்கியல் சார்ந்த உருப்படிவம்,

$$x_{ij} = \mu + \varphi_i + \epsilon_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots m$$
$$j = 1, 2, \ldots\ldots n$$

இதில்,

x_{ij} = iஆவது இனத்தில் jஆவது மதிப்பு (எடை அதிகரிப்பு).

μ = முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அனைத்து இன எருதுகளின் எடை அதிகரிப்புகளின் சராசரி.

φ_i = i ஆவது இனத்தைச் சேர்ந்த எருதுகளின் எடை அதிகரிப்பிற்கும், முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அனைத்து இன எருதுகளின் எடை அதிகரிப்புகளின்

சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாடு. அதாவது, i ஆவது இனத்தைச் சேர்ந்த எருதுகளின் எடை அதிகரிப்பை μi எனக்கொண்டால், $\varphi i = (\mu i - \mu)$.

ϵ_{ij} = பூச்சியம் கூட்டிடையும் σ^2 மாறுபாடும் கொண்டு இயல் நிலையில் பரவியுள்ள ராண்டம் விளைவு.

தீவனத்தினால் ஒரே இனத்தைச் சேர்ந்த எருதுகள் யாவற்றிற்கும் எடை அதிகரிப்பு ஒரே அளவில் இருக்கும். ஆனால், வேறுபட்ட இனங்களைச் சேர்ந்த எருதுகளின் எடை அதிகரிப்புகள் வேறுபட்டிருக்கின்றன. எனவே, φi–ன் மதிப்பு இனத்திற்கு இனம் மாறுபடுகின்றது. இனங்களின் முழுமைத் தொகுதியை நோக்குகையில், முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள இனங்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் வெவ்வேறு φi மதிப்புகள் இருப்பதாகக் கொள்ளலாம். எனவே, φi ஐ ஒரு ராண்டம் மாதிரியாகக் கருதலாம். φi ஐ முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியிலிருந்து உள்ள விலக்கமாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதால், φi–ன் பரவலின் கூட்டிடை பூச்சியமாக இருக்கும். மேலும், φi இயல் நிலையில் பரவியுள்ளது எனக் கொள்ளுகிறோம். எனவே, φi பூச்சியம் கூட்டிடையுடனும், $\sigma^2\varphi$ மாறுபாட்டுடனும் இயல் நிலையில் பரவியுள்ளது எனக் கொள்ளுகிறோம். $\sigma^2\varphi$, இனங்களின் மாறுபாட்டுப் பகுதி எனப்படுகிறது.

நிலையான விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவத்தில் கூறியவாறே ராண்டம் விளைவுகள் எருதிற்கு எருது மாறுபடுகின்றன. எருதுகளின் உடற்கூறுகளில் உள்ள வேறுபாடுகள், தீவனத்தை எருதுகள் உட்கொள்ளும் அளவிலுள்ள வேறுபாடுகள், தீவனங்களை எருதுகளுக்குத் தரும் முறையிலுள்ள வேறுபாடுகள், எடைகளை அளப்பதில் உள்ள வேறுபாடுகள் என்பன போன்ற பல காரணங்களினால் ராண்டம் விளைவுகள் ஏற்படுகின்றன. இந்த ராண்டம் விளைவுகள் பூச்சியம் கூட்டிடையுடன், σ^2 மாறுபாட்டுடன், இயல் நிலையில் பரவியுள்ளன. ϵ_{ij}–ம் φ_i–ம் ஒன்றையொன்று சாராது பரவியுள்ளன எனக் கொள்கிறோம்.

சோதனையின் நோக்கம் தீவனத்தின் விளைவு எல்லா இன எருதுகளுக்கும் ஒரே அளவினதாக இருக்கின்றதா என்பதை அறிந்து கொள்வதாகும். எல்லா இன எருதுகளுக்கும் தீவனத்தின் விளைவு ஒரே அளவினதாக இருந்தால், φi–ன் மாறுபாடு பூச்சியமாக இருக்கும். அதாவது $\sigma^2\varphi = 0$ ஆக இருக்கும். தீவனத்தின் விளைவு இனத்திற்கு இனம் மிகவும்

வேறுபட்டிருந்தால் $\sigma^2\varphi$–ன் மதிப்பு பெரிதாக இருக்கும். எனவே, $\sigma^2\varphi$-ன் மதிப்பு பூச்சியத்திலிருந்து பொருளுடைய வகையில் வேறுபட்டிருக்கின்றதா என்பதைச் சோதிப்பதே சோதனையின் நோக்கமாகும்.

ஆகவே,

ராண்டம் விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவத்தின் எடுகோள்:

H_o: $\sigma^2\varphi = 0$

எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது, இனங்களகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை சராசரி S_P^2–ம், இனங்களிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை சராசரி $S'_M{}^2$–ம், முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2–ன் மதிப்பீடுகளாகும். அதாவது,

$$E\,(S^2_P) = \sigma^2$$

$$E\,(S'_M{}^2) = \sigma^2$$

எடுகோள் உண்மையாக இல்லாதபோது,

$$E\,(S^2_P) = \sigma$$

$$F\,(S'_M{}^2) = \sigma^2 + n\,\sigma^2\varphi$$

எனவே, $S'_M{}^2 \,/\, S_P{}^2$ என்ற விகிதத்தைக் கணக்கிட்டு அது ஒன்றைவிட பொருளுள்ள வகையில் அதிகமாக இருந்தால், எடுகோள் தவறு எனக் கொண்டு தள்ளப்படுகின்றது.

எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது, $S'_M{}^2 \,/\, S^2_P$-ன் பரவல் $F_{m-1,\, N-m}$ ஆக உள்ளது. எனவே,

$S'^2_M \,/\, S^2_P = F \geq F\ \alpha,\ (m-1),\ (N-m)$ ஆக இருந்தால் எடுகோள் ஏற்கத் தகாதெனத் தள்ளப்படுகின்றது.

$S_P{}^2$, σ - ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடாகும். (unbiased estimate)

$S'_M{}^2$, $\sigma^2 + n\,\sigma^2\varphi$–ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடு.
எனவே, $S'_M{}^2 = S^2_P + n\,\sigma^2\varphi$

$$\therefore \quad \hat{\sigma}^2_{\varphi} = \frac{S'_M{}^2 - S^2_P}{n} = s^2_{\varphi}$$

s^2_{φ}, σ^2_{φ} ஐ மதிப்பிடுகின்றது (estimates).

ராண்டம் விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவத்திற்கும், நிலையான விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவத்திற்கும் உள்ள ஒற்றுமை வேற்றுமைகள்:

(1) கணக்கியல் சார்ந்த உருப்படிவம்:

நிலையான விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவத்தில்,

$$x_{ij} = \mu + \ + \alpha_i + \epsilon_{ij} \quad \alpha_i - \text{நிலையானவை.}$$

$$\epsilon_{ij} - N(0, \sigma^2)$$

ராண்டம் விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவத்தில்,

$$x_{ij} = \mu + \varphi_i + E_{ij} \quad \varphi_i - \text{ராண்டம் மாறி}$$

$$- N(0, \sigma^2\varphi)$$

$$\epsilon_{ij} - N(0, \sigma^2)$$

(2) எடுகோள்:

முதல் உருப்படிவத்தில்,

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots \alpha_m = 0$$

இரண்டாவது உருப்படிவத்தில்,

$$H_0 : \sigma^2\varphi = 0$$

(3) எடுகோள் தவருக இருக்கும்பொழுது,

முதல் உருப்படிவத்தில்,

$$E\ (S'_M{}^2) = \sigma^2 + \frac{n}{m-1} \sum_i \alpha_i^2$$

இரண்டாவது உருப்படிவத்தில்,

$$E\ (S'_M{}^2) = \sigma^2 + n\,\sigma^2\varphi$$

(4) சோதனையை மறுபடியும் நடத்துவதாகக் கொண்டால்,

முதல் உருப்படிவத்தில், முதல் சோதனையில் உள்ள இனங்களே இரண்டாவது சோதனையிலும் சோதிக்கப்படும்.

இரண்டாவது உருப்படிவத்தில், முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இனங்கள் ராண்டம் முறையில் மறுபடியும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதால், இரண்டாவது பரிசோதனையில் முதல் பரிசோதனையினின்றும் வேறுபட்ட இனங்கள் அமைய வாய்ப்பு ஏற்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு:

நான்கு இன எருதுகளுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்கு ஒரு குறிப்பிட்ட தீவனத்தைத் தீனியாக அளித்ததில், எருதுகளின் எடைகளில் ஏற்பட்ட அதிகரிப்புகள் (பௌண்டுகளில்) தரப்பட்டுள்ளன. நான்கு இன எருதுகளும் இனங்களின் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரியாகும்.

அட்டவணை 3 1.18 இனங்கள்

	A	*B*	*C*	*D*	
	21	19	40	26	
	17	26	33	34	
	21	19	31	33	
	28	20	35	30	
	26	14	29	27	
	24	20	32	35	
மொத்தம்	137	118	200	185	640
கூட்டிடை	22.8	19.7	33.3	30.8	106.7

எடுகோள்: எடை அதிகரிப்புகள் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள எல்லா இனங்களிலும் ஒரே மாதிரியாக இருக்கின்றன எனப் பொருள்படும்.

$H_0 : \sigma^2 \varphi = 0$

இவ்வெடுகோளைச் சோதனையிட பின்வரும் பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை அமைக்கப்படுகின்றது.

அட்டவணை-3.1.19

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	கணக்கிடப்பட்ட F	அட்டவணை F மதிப்பு
					5% 1%
இனங்களிடையே	3	753.00	251.00	16.94	3.10 4.94
இனங்களகத்தே	20	296.33	14.82		
மொத்தம்	23	1049.33			

$\frac{S'^2_M}{S^2_P} = F = 16.94 > F_{.01, 3, 20} = 4.94$ ஆக இருப்பதால், $\sigma^2_\varphi = 0$ என்ற எடுகோள் தள்ளப்படுகின்றது. எனவே, எல்லா இனங்களிலும் தீவனத்தின் விளைவாக எடை அதிகரிப்புகள் ஒரு படித்தானதாக இல்லை (not homogeneous.)

இனங்களின் எடை அதிகரிப்புகளின் மாறுபாடு σ^2_φ -ன் மதிப்பீடு,

$$s^2_\varphi = \frac{S'^2_M - S^2_F}{n}$$

$$= \frac{251.00 - 1\ .82}{6}$$

$$= 39.36$$

2. இருவழிப்பாகுபாடு

வேளாண்மைத்துறை பரிசோதனைகளில் விளைநிலம் வளத்திற்கு ஏற்பப் பல பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிரிக்கப்பட்ட பகுதிகள் ரெப்லிகேசன்கள் (Replications) எனப்படுகின்றன. ரெப்லிகேசன்களுக்கிடையே

வளத்தில் வேறுபாடு இருக்கலாம். ஆனால், ஒவ்வொரு ரெப்லி கேசனிலும் இயன்றவரை வளம் ஒரே மாதிரியாக இருக்கின்றது. நடத்துமுறைகளைப் பயன்படுத்த ரெப்லிகேசன்கள், நடத்து முறைகளின் எண்ணிக்கைக்கு ஏற்பப் பல சிறு கூறுகளாகப் (Plots) பிரிக்கப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, ஐந்து உர வகைகள் பரிசோதிக்கப்படும்பொழுது, ஒவ்வொரு ரெப்லிகேசனும் ஐந்தைந்து கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. ஒரு ரெப்லிகேசனிலுள்ள ஐந்து கூறுகளில் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு நடத்துமுறைக்கு ராண்டம் முறையில் ஒதுக்கப்படுகின்றது. ஐந்து உர வகைகளில் ஒவ்வொன்றும் ஆறுமுறை பயன்படுத்த வேண்டுமெனில், ஆறு ரெப்லிகேசன்கள் பரிசோதனையில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. எனவே, ஐந்து உர வகைகளும் ஆறு ரெப்லிகேசன்களும் கொண்ட சோதனையில் மொத்தம் 30 சிறு கூறுகள் (plots) உள்ளன. இந்த 30 சிறு கூறுகளிலும் விளைந்துள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட தானியத்தின் விளைச்சல்களை, உரங்களின் வகைகள், ரெப்லி கேசன்கள் என்ற இரு பண்புகளுக்கேற்ப வரைப்படுத்தலாம். இவ்வாறு இரு தனிச் சிறப்புப் பண்புகளின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்தப்பட்ட மதிப்புகளைக் கொண்ட செய்முறை 'இருவழிப்பாகுபாடு' என்று வழங்கப்படுகின்றது. பொதுவாக, m நடத்துமுறைகளுக்கும் n ரெப்லிகேசன்களுக்கும் ஏற்ப வகைப்படுத்த பரிசோதனையின் முடிவுகளைப் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்:

அட்டவணை 3.2.1

இரு வழிப் பாகுபாட்டு முறை

	நடத்து முறைகள். (நிரல்கள்). 1	2	3	......	i	......	m	மொத்தம்	கூட்டிடை
ரெப்லிகேசன்கள் (வரிசைகள்) 1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	......	x_{i1}	......	x_{m1}	$T_{\cdot 1}$	$\bar{x}_{\cdot 1}$
2	x_{12}	x_{22}	x_{32}	......	x_{i2}	......	x_{m2}	$T_{\cdot 2}$	$\bar{x}_{\cdot 2}$
3	x_{13}	x_{23}	x_{33}	......	x_{i3}	......	x_{m3}	$T_{\cdot 3}$	$\bar{x}_{\cdot 3}$
⋮	⋮	⋮	⋮	......	⋮	......	⋮	⋮	⋮
j	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	......	x_{ij}	......	x_{mj}	$T_{\cdot j}$	$\bar{x}_{\cdot j}$
⋮	⋮	⋮	⋮	......	⋮	......	⋮	⋮	⋮
n	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}	......	x_{in}	......	x_{mn}	$T_{\cdot n}$	$\bar{x}_{\cdot n}$
மொத்தம்	$T_{1\cdot}$	$T_{2\cdot}$	$T_{3\cdot}$	......	$T_{i\cdot}$	......	$T_{m\cdot}$	T	
கூட்டிடை	$\bar{x}_{1}$	$\bar{x}_{2}$	$\bar{x}_{3}$	......	$\bar{x}_{i\cdot}$	......	$\bar{x}_{m\cdot}$		$\bar{x}$

அட்டவணையில்,

$$T_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = i\text{ஆவது நிரலின் கூட்டுத் தொகை.}$$

$$T_{\cdot j} = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = j\text{ஆவது வரிசையின் கூட்டுத் தொகை.}$$

$$T = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \text{மொத்தக் கூட்டுத் தொகை.}$$

$$\bar{x}_{i\cdot} = \frac{T_{i\cdot}}{n} = i\text{ஆவது நிரலின் கூட்டிடை.}$$

$$\bar{x}_{\cdot j} = \frac{T_{\cdot j}}{m} = j\text{ஆவது வரிசையின் கூட்டிடை.}$$

$$\bar{x} = \frac{T}{N} = \text{பொதுக் கூட்டிடை } (N = m\,n).$$

தரப்பட்டுள்ள விவரங்களைச் சோதனையிட பின்வரும் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காண்கிறோம்.

$$\text{மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை} = \sum_{i=4}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x})^2$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை மூன்று தனித்தனி கூறுகளின் கூட்டுத் தொகையாக எழுதலாம்.

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \{ \sum_{i} \sum_{j} x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x}) + (\bar{x}_i - \bar{x}) + (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})\}^2$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_{\cdot i} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2$$

$$+ \sum_{i} \sum_{j} (x_{i\cdot} - \bar{x})^2 + \sum_{i} \sum_{j} (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2$$

$$+ 2 \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})(\bar{x}_i - \bar{x})$$

$$+ 2 \sum_i \sum_j (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x}) (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})$$

$$+ 2 \sum_i \sum_j (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}) (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}).$$

இச் சமன்பாட்டில்,

$$\sum_i \sum_i (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + x) \quad (\bar{x}_i - \bar{x})$$

$$= \sum_i (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}) \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})$$

$$= \sum_i x_{i\cdot} - \bar{x}) (n \bar{x}_{i\cdot} - n\dot{x}_{\cdot} - n \bar{x} + n \bar{x})$$

$$= \sum_i (\bar{x}_{\cdot} - \bar{x}) \times 0$$

$$= 0.$$

இதே மாதிரி,

$$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_j + \bar{x}) (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}) = 0.$$

$$\sum_i \sum_j (x_{i\cdot} - \bar{x}) (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}) = \sum_i (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}) \sum_j \bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})$$

$$= \sum_i (x_{i\cdot} - \bar{x}) \times 0$$

$$= 0.$$

எனவே,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - x)^2 = \sum_i \sum_j (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2 + \sum_i \sum_j \bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2$$

$$+ \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2$$

$$= n \sum_i (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2 + m \sum_j (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2$$

$$+ \sum_i \sum_j x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2$$

அதாவது,

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை = நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை + வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை + பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

கணக்கிட எளிதாக இருக்க, வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= S_T$

$$S_T = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2$$

$$= \sum_i \sum_j x_{ij} - N\bar{x}^2$$

$$= \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - (\sum \sum x_{ij})^2/N$$

$$= \sum_i \sum_j x_{ij} - \frac{T^2}{N}$$

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $(N - 1)$.

நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= S_1$

$$S_1 = n \sum_i (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2$$

$$= n \sum_i x_{i\cdot}^2 - N\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_i T_{i\cdot}^2 - \frac{T^2}{N}$$

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $(m-1)$.

வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= S_2$

$$S_2 = m \sum_j (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2$$

$$= m \sum_j \bar{x}_{\cdot j}^2 - N\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{m} \sum_j T_{\cdot j}^2 - \frac{T^2}{N.}$$

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $(n-1)$

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\}$ S_e

$$S_e = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2$$

$$= \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_i T_{i\cdot}^2 - \frac{1}{m} \sum_j T_{\cdot j}^2 + \frac{T^2}{N}$$

$$S_e = S_T - (S_1 + S_2)$$

என்ற தொடர்பிலிருந்து S_e-ன் மதிப்பை எளிதாகக் காணலாம்.

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $(m-1)(n-1)$.

இதுகாறும் பார்த்தவற்றை அட்டவணைப் படுத்தலாம்.

அட்டவணை 3.2.2. பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை சராசரி
நிரல்கள் இடையே	$m-1$	$S_1 = \frac{1}{n} \sum_i T_i^2 - \frac{T^2}{N}$	$S_1/m - 1 = S'_1$
வரிசைகள் இடையே	$n-1$	$S_2 = \frac{1}{m} \sum_j T_j^2 - T^2/N$	$S_2/n - 1 = S'_2$
பிழை இடையே	$(m-1)(n-1)$	$S_e = S_T - (S_c + S_r)$	$S_e/(m-1)(n-1) = S'_e$
மொத்தம்	$N-1$	$S_T = \sum_i \sum_j x_{ij} - T^2/N$	

அட்டவணையில் $N=mn$

இனி இருவழிப் பாகுபாட்டிற்கான தற்கோள்களையும், எடுகோள்களையும் பார்ப்போம்.

இருவழிப் பாகுபாட்டிற்கான கணக்கியல் சார்ந்த **உருப்படிவம்:**

$$x_{ij} = \mu_{ij} + \epsilon_{ij}$$

இதில் x_{ij} = i-வது நடத்து முறையைக் கொண்ட j ஆவது ரெப்லிகேசனில் உள்ள மதிப்பு.

μ_{ij} = i ஆவது நடத்து முறக்கும் jஆவது ரெப்லிகேசனுக்குமான விளைவு.

ϵ_{ij} = பூச்சியம் கூட்டிடையுடன் σ^2 மாறுபாட்டுடன் சாராத முறையில் (independently) இயல் நிலையில் பரவியுள்ள ராண்டம் விளைவு.

μ_{ij} யை மேலும் நான்கு கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம். $m\,n$ மதிப்புகளிலுமுள்ள μ_{ij} விளைவுகளை அட்டவணையில் எழுதலாம். எல்லா μ_{ij} களுக்கான கூட்டிடையை μ எனவும், iஆவது நடத்துமுறைக்கானவற்றின் கூட்டிடையை μ_i எனவும், jஆவது ரெப்லிகேசனுக்கானவற்றின் கூட்டிடையை μ_{ij} எனவும் குறிக்கலாம்.

அட்டவணை 3.2.3. நடத்து முறைகள்

	1	2	...	i	...	m	கூட்டிடை
1	μ_{11}	μ_{21}	...	μ_{ij}	...	μ_{m1}	$\mu_{\cdot 1}$
2	μ_{12}	μ_{22}	...	μ_{i2}	...	μ_{m2}	$\mu_{\cdot 2}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
j	μ_{1j}	μ_{2j}	...	μ_{ij}	...	μ_{mj}	$\mu_{\cdot j}$
⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
n	μ_{1n}	μ_{2n}	...	μ_{in}	...	μ_{mn}	$\mu_{\cdot n}$
கூட்டிடை	μ_1	μ_2	...	μ_i	...	μ_m	μ

$$\mu_{ij} = \mu + (\mu_{i} - \mu) + (\mu._{j} - \mu) + (\mu_{ij} - \mu._{i} - \mu._{j} + \mu)$$

என எழுதலாம்.

இதில் μ = பொது விளைவு.

$(\mu_{i}. - \mu) = \alpha_{i} = i$ ஆவது நடத்துமுறையின் விளைவு.

$(\mu._{j} - \mu) = \beta_{j} = j$ ஆவது ரெப்லிகேசனின் விளைவு.

$\mu_{ij} - \mu_{i}. - \mu._{j} + \mu) = (\alpha\beta)_{ij}$ = இடை விளைவு.

α_{i}, β_{j} என்ற விளைவுகளை உடனிகழ்வாக எடுத்துக் கொள்ளும்போது கிடைக்கும் இணைந்த விளைவு (joint effect) அவற்றின் தனித்தனியான விளைவுகளின் கூட்டுத் தொகையிலிருந்து மாறுபட்டு இருந்தால் α_{i}-க்கும் β_{j}-க்கும் இடையே இடை விளைவு உள்ளது எனப்படுகிறது.

எனவே, i ஆவது நிரலிலும், j ஆவது ரெப்லிகேசனிலும் உள்ள x_{ij} என்ற மதிப்பை ஐந்து தனித்தனி உறுப்புகளின் கூடுதலாக எழுதலாம்.

$$x_{ij} = \mu + \alpha_{i} + \beta_{j} + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ij}.$$

i ஆவது நடத்துமுறையின் α_{i}, i ஆவது நிரலிலுள்ள மதிப்புகள் யாவற்றிலும் சமமாக இருக்கும். m நடத்துமுறைகளின் விளைவுகளின் மொத்தம் பூச்சியத்திற்குச் சமம். அதாவது $\sum_{i} \alpha_{i} = 0$. j ஆவது ரெப்லிகேசனின் மதிப்பு j ஆவது வரிசையிலுள்ள மதிப்புகள் யாவற்றிலும் சமமாக இருக்கும். n ரெப்லிகேசன்களின் விளைவுகளின் மொத்தம் பூச்சியத்திற்குச் சமம். அதாவது, $\sum_{j} \beta_{j} = 0$. இருவழிப் பாகுபாட்டில் பொதுவாக இடைவிளவு இல்லை எனக் கொள்ளப்படுகின்றது. இருப்பினும், அது பிழையுடன் சேர்த்துக்கொள்ளப்படுகின்றது. எனவே, இருவழிப் பாகுபாட்டிற்கான கணக்கியல் சார்ந்த உருப்படிவம் இடை விளைவைப் பொருட்படுத்துவதில்லை (ignores). ஆகவே,

$$x_{ij} = \mu + \alpha_{i} + \beta_{j} + \epsilon_{ij}$$

இருவழிப் பாகுபாட்டில், ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு நான்கு கூறுகளின் கூட்டுத் தொகையாகக் கொள்ளப்படுகின்றது. இருவழிப் பாகுபாட்டில் உள்ள மதிப்புகள் நான்கு பகுதிகளின் கூட்டுத் தொகையாக உள்ளதைப் பின்வரும் அட்டவணை விளக்குகின்றது.

அட்டவணை 3.2.4.

உருப்படிவத்திற்குகந்தவாறு அமைக்கப்பட்ட சோதனை

$\mu = 120$

	நடத்துமுறைகள் A $\alpha_1=-8$	B $\alpha_2=5$	C $\alpha_3=-1$	D $\alpha_4=9$	E $\alpha_5=-5$	மொத்தம்	கூட்டிடை
$\beta_1=-2$	120 −8 −2 3	120 5 −2 2	120 −1 −2 3	120 9 −2 −8	120 −5 −2 −4		
	$x_{11}=113$	$x_{21}=125$	$x_{31}=120$	$x_{41}=119$	$x_{51}=109$	586	117.2
ரெப் $\beta_2=0$	120 −8 0 3	120 −5 0 −8	120 −1 0 −2	120 9 0 4	120 −5 0 0		
வி	$x_{12}=115$	$x_{22}=117$	$x_{32}=117$	$x_{42}=133$	$x_{52}=115$	597	119.4
கே சன் $\beta_3=7$	120 −8 7 −1	120 5 7 3	120 −1 7 4	120 9 7 −5	120 −5 7 8		
கள்	$x_{13}=118$	$x_{23}=135$	$x_{33}=130$	$x_{43}=131$	$x_{53}=130$	644	128.8

(தொடர்ச்சி — அடுத்த பக்கம் பார்க்க)

	நடத்து முறைகள் A $\alpha_1 = -8$	B $\alpha_2 = -5$	C $\alpha_3 = -1$	D $\alpha_4 = 9$	E $\alpha_5 = -5$	மொத்தம்	கூட்டிடை
ரெப்ளிகேசன்கள் $\beta_4 = -3$	120 -8 -3 5 $x_{14} = 114$	120 5 -3 -5 $x_{24} = 117$	120 -1 -3 -6 $x_{34} = 110$	120 -9 -3 2 $x_{44} = 128$	120 5 -3 0 $x_{54} = 112$	581	116.2
$\beta_5 = 3$	120 -8 3 6 $x_{15} = 121$	120 5 3 -4 $x_{25} = 124$	120 -1 3 5 $x_{35} = 127$	120 9 3 3 $x_{45} = 135$	120 -5 3 0 $x_{55} = 115$	625	125.0
$\beta_6 = -5$	120 -8 -5 -7 $x_{16} = 100$	120 5 -5 4 $x_{26} = 124$	120 -1 -5 -4 $x_{36} = 110$	120 9 -5 0 $x_{46} = 124$	120 -5 -5 5 $x_{56} = 115$	573	114.6
மொத்தம்	681	742	714	770	699	3606	
கூட்டிடை	113.50	123.67	119.00	128.33	116.50		120.20

இவ் வட்டவணையில் ஒவ்வோர் அறையிலும் முதலில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது பொதுவிளைவு μ. இரண்டாவதாக நடத்து முறையின் விளைவான α_i-ம், மூன்ருவதாக ரெப்லிகேசன் விளைவான β_j-ம், நான்காவதாக ராண்டம் விளைவான ϵ_{ij}-ம் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்வுருப்படிவத்தின்படி x_{ij} என்பது இந் நான்கின் கூட்டுத் தொகையாகும். நடத்து முறைகள், விளைவுகளின் கூட்டுத் தொகையும், ரெப்லிகேசன்கள் விளைவு களின் கூட்டுத் தொகையும் தனித்தனியே பூச்சியத்திற்குச் சமமாக இருப்பதையும், அறைக்கு அறை ராண்டம் விளைவுகள் வேறுபடுவதையும் காணலாம்.

சோதனையின் நோக்கம் நடத்துமுறைகள் யாவும் ஒரே அளவு விளைவுகள் கொண்டனவா என்பதை அறிவதாகும். அதாவது α_i-ன் மதிப்புகள் m நடத்துமுறைகளிலும் சமமாக உள்ளனவா என்பதைச் சோதிப்பதே சோதனையின் ஓர் எடு கோளாகும். α_i-கள் சமமாக இருப்பின், அவை யாவும் தனித்தனியே பூச்சியத்திற்குச் சமமாக இருக்கும். ஏனெனில், $\sum_i \alpha_i = 0$. இதேபோல, n ரெப்லிகேசன்களின் விளைவுகள் சம மாக உள்ளனஎன்பதைச் சோதிப்பது மற்ருேர் எடுகோளாகும். $\sum_i \beta_j = 0$ ஆக இருப்பதால், β_j-கள் சமமாக இருக்கும்பொழுது அவை யாவும் தனித்தனியே பூச்சியத்திற்குச் சமமாக இருக்கும்.

எனவே, இருவழிப்பாகுபாட்டில் சோதிக்கப்படும் எடுகோள்கள் :

$$H_1 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$$

$$H_2 = \beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_n = 0.$$

முதலில் $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ என்ற எடுகோளைச் சோதனையிடும் முறையைக் காண்போம். இவ்வெடுகோளின் சோதனை, ரெப்லிகேசன்களின் விளைவுகளைச் சாராது (Indeperdent of replication effects) செய்யப்படுகின்றது. இவ் வெடுகோள் உண்மையாக இருக்கும்பொழுது நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை சராசரியும், பிழைவர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரியும் முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2-ன் மதிப்பீடுகள் ஆகும். அதாவது,

E (நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை சராசரி) $= E(S_1') = \sigma^2$

E (பிழைவர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை சராசரி) $= E(S'_e =)\sigma^2$

ஆனால் எடுகோள் உண்மையாக இல்லாதபோது,

$$E(S_1') = \sigma^2 + \frac{n}{m-1}\sum_i \alpha_i^2$$

$$E(S_e') = \sigma^2$$

அதாவது எடுகோள் உண்மையாக இல்லாத S_1' ன் மதிப்பு σ^2 ஐ விடஅதிகமாக இருக்கின்றது. எனவே $S_1'/S^1{}_e$ என்ற விகிதத்தின் மதிப்பு பொருளுடையவகையில் ஒன்றைவிட அதிகமாக இருந்தால் எடுகோளை ஏற்கத்தகாதெனக் கொள்ளலாம். எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும்பொழுது S_1'/σ^2-ம், $S^1{}_e/\sigma^2$-ம் ஒன்றையொன்று சாராது $(m-1)$ $(m-1)$ $(n-1)$ வரையற்ற பாகைகளுடன் X^2 ஆகப்பரவியுள்ளன. எனவே, S_1'/S_e', $(m-1)$ $(m-1)$ $(n-1)$ வரையற்றபாகைகள் கொண்ட F பரவலாக இருக்கின்றது. எனவே,

$$\frac{S_1'}{S_e^1} = F \leq F\,\alpha,_{(m-1),\ (m-1)\ (n-1)}$$ ஆக இருந்தால்,

எடுகோள் ஏற்கத்தகாதெனத் தள்ளப்படுகின்றது. $F\alpha,_{(m-1),}$ $_{(m-1)\ (m-1)}$ என்பது, $_{(m-1), (m-1)\ (n-1)}$ வரையற்றபாகைகள் கொண்ட கோட்பாட்டியலான F பரவலின் α சதவீத மதிப்பைக் குறிக்கின்றது.

இதேபோல ரெப்லிகேன்களின் விளைவுகளை, நடத்துமுறைகளின் விளைவுகளைச் சாராது சோதனையிடலாம்.

$$\frac{S_2'}{S_e'} = F \geq F\,\alpha,_{(n-1),\ (m-1)\ (n-1)}$$

ஆக இருந்தால்,

$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$ என்ற எடுகோள் ஏற்கத்தகா தெனத் தள்ளப் படுகின்றது.

எடுகோள்களில் ஒன்று அல்லது இரண்டுமே ஏற்கத்தகாதெனத் தள்ளப்பட்டிருந்தால், ஒருவழிப்பாகுபாட்டில் கூறியுள்ள முறைகளைப் பயன்படுத்தி, கூட்டிடை இணைகளை (Pairs of means) வேறுபாடுகளுக்காகச் சோதனையிடலாம்.

உருப் படிவத்திற்குத் தகுந்தவாறு அமைக்கப்பட்ட சோதனையின் ஆய்வு:

தரப்பட்டுள்ள விவரங்களின் ஆதியை (Origin) மாற்றிக் கணக்கீடுகள் செய்வது எளிது. ஆதியை 120-க்கு மாற்றி எழுதப்பட்ட விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 3.2.5.

நடத்து முறைகள்

	A	B	C	D	E	மொத்தம்
ரெப்லி கேசன்கள்	−7	5	0	−1	−11	−14
	−5	−3	−3	13	−5	−3
	−2	15	10	11	10	44
	−6	−3	−10	8	−8	−19
	1	4	7	15	−2	25
	−20	4	−10	4	−5	−27
மொத்தம்	−39	22	−6	50	−21	6

கணக்கீடுகள்,

(1) சரியீட்டளவு $= \frac{T^2}{N} = \frac{6^2}{30} = 1{\cdot}20$

(2) $\sum_i \sum_j x_{ij}^2 = (-7)^2 + (-5)^2 + \ldots + (-2)^2 + (-5)^2$

$= 2108$

(3) $\frac{1}{n}\sum_i T_i^2 = \frac{4982}{6} = 830{\cdot}33$

(4) $\frac{1}{m}\sum T_{\cdot j}^2 = \frac{3856}{5} = 771{\cdot}20$

(5) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$= S_T = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$

$= (2) - (1)$

$= 2106.80$

(6) நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= S_1 = \frac{1}{n}\sum T_i^2 - \frac{T^2}{N}$

$= (3) - (1)$

$= 829.13$

(7) ரெப்லிகேசன் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= S_2 = \frac{1}{m}\sum T_{.j}^2 - \frac{T^2}{N}$

$= (4) - (1)$

$= 770.00$

(8) பிழைவர்க்கங்களின்கூட்டுத் தொகை $= S_T - (S_1 + S_2$

$= (5) - (6) - (7)$

$= 507.67$

இனி இவற்றைப் பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

அட்டவணை 3.2.6

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு 5%	1%
நடத்து முறைகள்	4	829.13	207.28	8.29	2.87	4.43
ரெப்லி கேசன்கள்	5	770.00	154.00	6.16	2.71	4.10
பிழை	20	507.67	25.38			
மொத்தம்	29	2106.80				

எடுகோள்கள்

(1) நடத்து முறை விளைவுகளில் வேறுபாடுகள் இல்லை.

$$H_1 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0.$$

(2) ரெப்ளிகேசன் விளைவுகளில் வேறுபாடுகள் இல்லை.

$$H_2 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0.$$

$\frac{S'_1}{S'_2} = 8.29 > F_{.01, 4, 20} = 4.43$ ஆக இருப்பதால், நடத்துமுறை விளைவுகளில் வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோள் தள்ளப்படுகின்றது. நடத்து முறைகளிடையே வேறு பாடுகள் இருக்கின்றன.

$\frac{S'_2}{Se'} = 6.16 > F_{.01, 5, 20}$ ஆக இருப்பதால், ரெப்ளிகேசன்களிடையே வேறுபாடுகள் உள்ளன என்ற முடிவு ஏற்படு கின்றது.

மீச்சிறு பொருளுடை வேறுபாட்டுச் சோதனையைப் பயன் படுத்தி விரும்பும் இரு கூட்டிடைகளிடையேயுள்ள வேறு பாட்டைச் சோதனையிடலாம். B, C கூட்டிடைகளிடையே உள்ள வேறுபாட்டையும் C, D கூட்டிடைகளிடையே உள்ள வேறுபாட்டையும் சோதனையிடவேண்டும் எனக் கொள்வோம்.

மீச்சிறு பொருளுடை வேறுபாடு (மீ.பொ.வே)

$$= t_{.05, 20} \cdot \sqrt{\frac{2 s^2}{n}}$$

$$= 2.086 \times \sqrt{\frac{2 \times 25.38}{6}}$$

$$= 6.07$$

B, C கூட்டிடைகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடு $\}$ = 123 67—119.00

= 4 67

வேறுபாடு 4.67, மீ.பொ.வே.ஐ விடக் குறைவாக இருப் பதால், B,C கூட்டிடைகளுக்கிடையே உண்மையில் வேறுபாடு இல்லை என்ற முடிவு ஏற்படுகின்றது.

C, D கூட்டிடைகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடு $\Big\}$ $= 128.33 - 119.00$
$= 9.33$

வேறுபாடு 9.33, மீ. பொ.வே 6.07 ஐ விட அதிகமாக இருப்பதால், கூட்டிடைகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடு 5 சத வீத மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இருக்கின்றது. முழுமைத்தொகுதியில் C, D கூட்டிடைகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டிற்கான 95 சதவீத நம்பிக்கை எல்லைகள் 9.33 ± 6.07 ஆகும். அதாவது நம்பிக்கை எல்லைகள் (3.26, 15.40).

இனி ஸ்டூடண்டைசுடு வீச்சு Q சோதனைமுறையைப் பயன்படுத்தி $B,C;C,D$ என்ற இரு இணை கூட்டிடைகளின் வேறுபாடுகளைச் சோதனையிடலாம்.

அட்டவணையில் இருந்து,

$$Q_{.05,5} = 4.24 \qquad (f=20\ ;\ a = 5)$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{25.38}{6}} = 2.06$$

$$Q_{.05,5} \times s_{\bar{x}} = 4.24 \times 2.06$$

$$= 8.73$$

8.73 உடன் ஒப்பிட, B, C கூட்டிடைகளிடையேயுள்ள வேறுபாடு 5 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இல்லை. CD கூட்டிடைகளிடையேயுள்ள வேறுபாடு 5 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இருக்கின்றது. முழுமைத்தொகுதியில் C, D கூட்டிடைகளிடையேயுள்ள வேறுபாட்டிற்கான 95 சதவீத நம்பிக்கை எல்லைகள் (0.60, 18.06).

Q முறையில், பொருளுடையதாக இருக்க, மீ பொ.வே ஐ விட அதிக அளவிலான வேறுபாடு வேண்டியிருப்பதையும், நம்பிக்கை இடைவெளி மீ. பொ.வே-ல் இருப்பதைவிட அதிகமாக இருப்பதையும் காணலாம்.

இனி Q முறையைத் தொடர்ச்சியாகப் பயன்படுத்தி எவ்வெவ்விணைக் கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் பொருளுடை

யனவாக உள்ளன என்பதனைக் காணலாம். கூட்டிடைகளை ஏறுவரிசையில் எழுத,

A	E	C	B	D
113.50	116.50	119.00	123.67	128.33

AD-க்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடு $14.83 > Q_{\cdot 05, 5}\, s_{\bar{x}} = 8.73$ ஆக இருப்பதால், A, D கூட்டிடைகள் பொருளுள்ள வகையில் வேறுபடுகின்றன. நான்கு நான்காகக் கூட்டிடைகளை எடுத்துக் கொள்ள,

A	E	C	B		E	C	B	D
113.50	116.50	119.00	123.67		116.50	119.00	123.67	128.33

நான்கு நடத்துமுறைகளுக்கான $Q_{\cdot 05, 4}$ ஐ அட்டவணையிலிருந்து எடுத்து அதை $s_{\bar{x}}$ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் மதிப்பு:

$$Q_{\cdot 05, 4} \times s_{\bar{x}} = 3.96 \times 2.06$$

$$= 8.12$$

8.12 உடன் A-க்கும் B-க்கும் உள்ள வேறுபாட்டையும், E-க்கும் D-க்கும் உள்ள வேறுபாட்டையும் ஒப்பிட, வேறுபாடுகள் பொருளுள் M வகையில் இருப்பதைக் காணலாம். எனவே, மூன்றுமூன்று கூட்டிடைகளாக எடுத்துக் கொண்டால்,

A	E	C		E	C	B		C	B	D
113.50	116.50	119.0		116.50	119.0	123.67		119.00	123.67	128.33

A, C; E, B; C, D என்ற இணைக்கூட்டிடைகளில் உள்ள வேறுபாடுகளை $Q_{\cdot 05, 3}\, s_{\bar{x}} = 3.58 \times 2.06 = 7.37$ உடன் ஒப்பிட

C, D இணைக் கூட்டிடைகளில் உள்ள வேறுபாடு மட்டும் பொருளுடையதாக இருப்பதைக் காணலாம். இனி B, D என்ற கூட்டிடைகளிடையே உள்ள வேறுபாடு பொருளுடையதாக இல்லாமலிருப்பதைக் காணலாம்.

$$(Q_{\cdot 05, 2} \times s_{\bar{x}} = 2.95 \times 2.06 = 6.07)$$

எனவே, Q முறையைத் தொடர்ச்சியாகப் பயன்படுத்தியதில் AD; AB; ED; CD என்ற இணைக்கூட்டிடைகளில் வேறுபாடுகள் பொருளுள்ள வகையில் அமைந்திருப்பதைக் காண்கிறோம்.

இதுகாறும் பார்த்த எடுகோள்களும் அவற்றின் ஆய்வுமுறையும் நிலையான விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவத்தைச் சேர்ந்தன வாகும். இவ்வகை உருப்படிவத்தில் சோதனை செய்யப் படவேண்டிய இருவகைப்பண்புக் கூறுகள் அனைத்தும் சோதனை செய்யப்படுகின்றன. பரிசோதனையின்முடிவுகள் பயன்படுத்தப் பட்ட பண்புக் கூறுகளுக்குமட்டுமே பொருந்தும் எனக் கொள்ளப்படுகின்றது.

இனி, ராண்டம் விளைவுகள் கொண்ட உருப் படிவத்தையும் (Random Effects Model), கலப்பு ஈரின விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவத்தையும் (Mixed Effects Model) காண்போம்.

ராண்டம் விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவம்: இவ்வுருப் படிவத்தில் இரு பண்புக் கூறுகளின் முழுமைத் தொகுதிகளி (Populations of categories) லிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரிகள் எனக்கொண்டு பரிசோதனையின் முடிவுகள் முழுமைத் தொகுதிகளிலுள்ள பண்புக் கூறுகள் அனைத்திற்கும் அனுமானிக்கப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, மாணவர்களின் வளர்ச்சி வீதத்தைச் (growth rate) சோதனையிடும் பொருட்டு, இரு வழிப் பாகுபாடு முறையில் சோதனை அமைக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம். 500 பள்ளிகளில் 10 வயதுத் தொகுதிகளில் உள்ள மாணவர்களைப் பற்றியதாகச் சோதனை அமைய வேண்டும் எனவும் கொள்வோம். 500 பள்ளிகளிலுள்ள 10 வயதுத் தொகுதிகளைச் சேர்ந்த மாணவர்களைப் பற்றிய விவரங்களைச் சேகரித்துப் பரிசோதனையை நடத்துவது என்பது எளிதன்று. எனவே, முதல் பண்புக் கூறுகளான 500 பள்ளிகளிலிருந்து, 10 பள்ளிகள் (பண்புக் கூறுகள்) ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. இரண்டாவது பண்புக் கூறுகளான 10 வயதுத் தொகுதிகளிலிருந்து 5 வயதுத் தொகுதிகள் (இரண்டாவது பண்புக் கூறுகள்) ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 10 பள்ளிகளிலுள்ள 5 வயதுத் தொகுதிகளைச் சேர்ந்த மாணவர்களைப் பற்றிய விவரங்கள் சேகரிகப்பட்டு பரிசோதனை நடத்தப்படுகின்றது. இப் பரிசோதனையின் முடிவுகளை 500 பள்ளிகளுக்கும் 10 வயதுத் தொகுதிகளுக்கும் அனுமானிக்கிறோம். 500 பள்ளிகளும், 10 வயதுத் தொகுதிகளும் முழுமைத் தொகுதிகளைக் குறிக்கின்றன. பரிசோதனையில் பயன் படுத்தப்படும் 10 பள்ளிகளும், 5 வயதுத் தொகுதிகளும் முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரிகளாகும். எனவே, மாதிரிகளின் முடிவுகளிலிருந்து முழுமைத் தொகுதிகளைப் பற்றி அனுமானிக்கிறோம்.

ராண்டம் விளைவுகள் கொண்ட உருப் படிவத்திற்கான கணக்கிடும் முறைகள் நிலையான விளைவுகள் கொண்ட உருப் படிவத்தில் உள்ளனவேயாகும். ஆனால், அவற்றிற்குரிய விளக்கங்களில் (interpretations) வேறுபாடுகள் உள்ளன.

இவ் வகை உருப் படிவத்திற்கான கணக்கியல் சார்ந்த உருப் படிவம்:

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, ..m \\ j = 1, 2, ...n \end{matrix}$$

இதில்

x_{ij} = i ஆவது முதல் பண்புக் கூறும், j ஆவது இரண்டாவது பண்புக் கூறும் கொண்ட மதிப்பு.

μ = பொது விளைவு.

α_i = i ஆவது முதல் பண்புக் கூறின் விளைவு.

β_j = j ஆவது இரண்டாவது பண்புக் கூறின் விளைவு.

$(\alpha\beta)_{ij}$ = முதல் பண்புக் கூறுகளுக்கும் இரண்டாவது பண்புக் கூறுகளுக்குமான இடை விளைவு.

ϵ_{ij} = பூச்சியம் கூட்டிடையுடன், σ^2 மாறுபாட்டுடன் சாராது இயல் நிலையில் பரவியுள்ள ராண்டம் விளைவு.

α_i-ன் மதிப்பு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள பண்புக் கூறுகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் வெவ்வேருக இருப்பதாகக் கொள்ளலாம். எனவே, α_iஐப் பூச்சியம் கூட்டிடையுடன் σ^2_α மாறுபாட்டுடன் இயல் நிலையில் பரவியுள்ள ராண்டம் மாறி எனக் கொள்ளப்படுகின்றது. இதேபோல, β_jஐப் பூச்சியம் கூட்டிடையுடன் σ^2_β மாறுபாட்டுடன் இயல் நிலையில் பரவியுள்ள ராண்டம் மாறி எனக் கருதப்படுகின்றது. இடை விளைவான $\alpha\beta_{ij}$, பூச்சியம் கூட்டிடையுடன் $\sigma^2_{\alpha\beta}$ மாறுபாட்டுடன் இயல் நிலையில் பரவியுள்ள ராண்டம் மாறி எனக் கொள்ளப்படுகின்றது. α_i, β_j, $(\alpha\beta)_{ij}$, ϵ_{ij} ஆகியவை ஒன்றையொன்று சாராது பரவியுள்ளன என்றும் கருதப்படுகின்றது.

முதல் பண்புக் கூறுகளின் விளைவுகள் ஓரே மாதிரியானவைகளாக இருந்தால், α_i பரவலின் மாறுபாடு பூச்சியமாக இருக்கும். சோதனையின் நோக்கம் முதல் பண்புக் கூறு

களின் விளைவுகள் சமமாக உள்ளனவா என்பதைச் சோதிப்பதேயாகும். எனவே, இப் பரிசோதனைக்கான எடுகோள் $\sigma^2_{\alpha} = 0$ என்பதாகும். இதே போல, இப் பரிசோதனைக்கான மற்றோர் எடுகோள் $\sigma^2_{\beta} = 0$ என்பதாகும்.

இந்த உருப் படிவத்தில்,

E (பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி)

$$= E(S'_e) = \sigma^2 + \sigma^2_{\alpha\beta}$$

E (முதல் பண்பு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி)

$$= E(S'_1)$$

$$E(S'_1) = \sigma^2 + \sigma^2_{\alpha\beta} + n\,\sigma^2_{\alpha}$$

எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும்பொழுது,

$$E(S'_e) = \sigma^2 + \sigma^2_{\alpha\beta}$$

$$E(S'_1) = \sigma^2 + \sigma^2_{\alpha\beta}$$

எனவே, இடைவிளைவு இருக்கின்றது அல்லது இல்லை என்ற தற்கோள் ஏதுமின்றி S'_1/S'_e என்ற விகிதத்தில் மதிப்பைக் கொண்டு எடுகோளைச் சோதனையிடலாம். எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது, $S'_1/\sigma^2 + \sigma^2_{\alpha\beta}$-ம், $S'_e/\sigma^2 + \sigma^2_{\alpha\beta}$-ம் முறையே $(m-1)$, $(m-1)(n-1)$ வரையற்ற பாகைகளுடன் ஒன்றையொன்று சாராது χ^2 ஆகப் பரவியுள்ளன. எனவே, $\frac{S_1'}{S_e'}$, $(m-1)$, $(m-1)(n-1)$ வரையற்ற பாகைகளுடன் F ஆகப் பரவியுள்ளது.

எனவே, $\frac{S'_1}{S'_e} = F \geq F_{\alpha,\,(m-1),\,(m-1)(n-1)}$ ஆக இருந்தால் $\sigma^2_{\alpha} = 0$ என்ற எடுகோள் ஏற்கத் தகாதெனத் தள்ளப்படுகின்றது.

இதேபோல,

$S'_2/S'_e = F \geq F_{\alpha,\,(n-1),\,(m-1)(n-1)}$ ஆக இருந்

தால், $\sigma^2_\beta = 0$ என்ற எடுகோள் ஏற்கத் தகாதெனத் தள்ளப் படுகின்றது.

பண்புகளின் விளைவுகள் எவ்வாறு வேறுபடுகின்றன என்பதை அறிய $\sigma^2_\alpha, \sigma^2_\beta$ ஆகியவற்றை மதிப்பிடலாம்.

$$E(S'_1) = \sigma^2 + \sigma^2_{\alpha\beta} + n\sigma^2_\alpha$$

$$E(S'e) = \sigma^2 + \sigma^2_{\alpha\beta}$$ என முதலில் பார்த்தோம்.

$$S'_1 = \sigma^2 + \sigma^2_{\alpha\beta} + n\sigma^2_\alpha\,; \quad S'e = \sigma^2 + \sigma^2_{\alpha\beta}$$

எனக் கொண்டால்,

$$\hat{\sigma}^2_\alpha = \frac{S'_1 - S'e}{n} = S^2_\alpha$$

இதேபோல, $\hat{\sigma}^2_\beta \dfrac{S'_2 - S'e}{m} = S^2_\beta$

கலப்பு ஈரின விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவம்
(Mixed Effects Model)

இருவழிப் பாகுபாட்டில், ஒரு பண்பின் கூறுகளின் விளைவுகளை நிலையானவையாகவும், மற்ற பண்பின் கூறுகளின் விளைவுகளை ராண்டமாகவும் கொண்டால், கலப்பு ஈரின விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவம் அமைகின்றது. ராண்டம் விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவத்திற்காக தரப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டில், 500 பள்ளிகளிலிருந்து ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 10 பள்ளிகளிலுமுள்ள 10 வயதுத் தொகுதியிலுமுள்ள மாணவர்களைக் கொண்டு பரிசோதனை அமைந்தால், அது கலப்பு ஈரின விளைவுகள் கொண்ட உருப் படிவம் எனப்படுகின்றது. இப் பரிசோதனையில், பள்ளிகளின் விளைவுகள் ராண்டமாகவும், வயதுத் தொகுதிகளின் விளைவுகள் நிலையானவையாகவும் கொள்ளப்பட்டுள்ளன.

இவ்வுருப் படிவத்திற்கான கணக்கியல் சார்ந்த உருப்படிவம்:

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ij}$$

இதில்,

α_i, $(\alpha\beta)_{ij}$, ϵ_{ij} ஆகியவை ராண்டம் மாறிகள்.

β_j நிலையான விளைவாகும்.

α_i, பூச்சியம் கூட்டிடையுடன் σ^2_α மாறுபாட்டுடன் இயல் நிலையில் பரவியுள்ளதாகக் கொள்ளப்படுகின்றது.

$(\alpha\beta)_{ij}$, பூச்சியம் கூட்டிடையுடன் $\sigma^2_{\alpha\beta}$ மாறுபாட்டுடன் இயல் நிலையில் பரவியுள்ளது.

ϵ_{ij}, பூச்சியம் கூட்டிடையுடன் σ^2 மாறுபாட்டுடன் இயல் நிலையில் பரவியுள்ளது.

β_j என்பது j ஆவது இரண்டாவது பண்புக்கூறின் விளைவு. இவ்விளைவு இரண்டாவது பண்புக்கூறுகள் யாவற்றிற்கும் சமமாக இருக்கும். n கூறுகளின் விளைவுகளின் மொத்தம் பூச்சியத்திற்குச் சமம். அதாவது $\sum_j \beta_j = 0$.

α_i என்ற விளைவு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள கூறுகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் வேறுபட்டிருக்கும். வேறுபட்டிருக்கும் நிலையை σ^2_α தெரிவிக்கின்றது. முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள கூறுகளிலெல்லாம் விளைவுகள் ஒரே மாதிரியானவைகளாக இருந்தால், $\sigma^2_\alpha = 0$ ஆக இருக்கும். எனவே, சோதிக்கப்படும் எடுகோள் $\sigma^2_\alpha = 0$ என்பதாகும்.

இரண்டாவது பண்புக் கூறுகளின் விளைவுகள் சமமாக உள்ளனவா என்பதை அறிய,

$$H: \beta_1 = \beta_2 = \ldots\ldots = \beta_n = 0$$

என்ற எடுகோளைச் சோதிக்கவேண்டும்.

$\sigma^2_{\alpha} = 0$ என்ற எடுகோளைச் சோதனையிட இடைவிளைவு இல்லை எனக்கொள்ளவேண்டும். இத்தற்கோளின் கீழ் S'_1/S'_e என்ற விகிதம், எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும்பொழுது, $(m-1)$, $(m-1)$ $(n-1)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட F ஆகப் பரவியுள்ளது. எனவே,

$\frac{S'_1}{S'_e} = F > F_{\alpha, (m-1), (m-1)(n-1)}$ ஆக இருந்தால் $\sigma^2_{\alpha} = 0$ என்ற எடுகோள் ஏற்கத்தகாதெனத் தள்ளப்படுகின்றது.

$\beta_1 = \beta_2 = \ldots\ldots = \beta_m = 0$ என்ற எடுகோளைச் சோதனையிட இடைவிளைவு இருக்கின்றது அல்லது இல்லை என்ற ஒருவிதத் தற்கோளும் வேண்டியதில்லை. எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது, S'_2/S'_e என்ற விகிதம், $(n-1)$, $(m-1)$ $(n-1)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட F பரவலாக உள்ளது. இதைக் கொண்டு விளைவுகள் பொருளுடையனவாக உள்ளனவா என்பதைச் சோதனையிடலாம். எடுகோள் நிராகரிக்கப்பட்டால், இரண்டாவது பண்புக் கூறுகளின் கூட்டிகளிடையேயுள்ள வேறுபாடுகளை மீ. பொ. வே. முறையையும், Q முறையையும் கொண்டு சோதனை செய்யலாம்.

3. இருவழிப்பாகுபாடு

ஒவ்வோர் அறையிலும் P மதிப்புகள்

இதுவரை ஒவ்வோர் அறையிலும் (cell) ஒரு மதிப்பு இருந்தால் எவ்வாறு ஆய்வு நடத்துவது என்பதைக் கண்டோம். ஒவ்வோர் அறையிலும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட (p மதிப்புகள்) இருந்தால் எவ்வாறு ஆய்வு நடத்துவது என்பதைக் காண்போம்.

ஒவ்வோர் அறையிலும் p மதிப்புகள் உள்ள நிலையைப் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

அட்டவணை 3.3:1. நடத்து முறைகள்

(ஒரட்திகெசண்கள்)

	1	2	...	i	...	m
	x_{111}	x_{211}	...	x_{i11}	...	x_{m11}
	x_{112}	x_{212}	...	x_{i12}	...	x_{m12}
1	⋮	⋮		⋮		⋮
	x_{11P}	x_{21P}	...	x_{i1P}	...	x_{m1P}
	x_{121}	x_{221}	...	x_{i21}	...	x_{m21}
2	x_{122}	x_{222}	...	x_{i22}	...	x_{m22}
	⋮	⋮		⋮		⋮
	x_{12P}	x_{22P}	...	x_{i2P}		x_{m2P}
	⋮					
	x_{1j1}	x_{2j1}	...	x_{ij1}	...	x_{mj1}
	x_{1j2}	x_{2j2}	...	x_{ij2}	...	x_{mj2}
j	⋮	⋮		⋮		⋮
	x_{1jP}	x_{2jP}	...	x_{ijP}	...	x_{mjP}
	⋮					
	x_{1n1}	x_{2n1}	...	x_{in1}	...	x_{mn1}
	x_{1n2}	x_{2n2}	...	x_{in2}	...	x_{mn2}
n	⋮	⋮		⋮		⋮
	x_{1nP}	x_{2nP}	...	x_{inP}	...	x_{mnP}

இதற்கான கணக்கியல் சார்ந்த உருப்படிவம்,

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i = \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

$$i = 1, 2 \ldots m$$

$$j = 1, 2 \ldots n$$

$$k = 1, 2 \ldots p$$

இதில்,

μ = பொது விளைவு.

$\alpha_i = i$ ஆவது நடத்துமுறையின் விளைவு,

iஆவது நடத்து முறையைக் கொண்ட யாவற்றிற்கும் இவ்விளைவு சமமாக உள்ளது.

$$\sum_i \alpha_i = 0$$

$\beta_j = j$ஆவது ரெப்லிகேசனின் விளைவு. jஆவது ரெப்லிகேசனில் உள்ள மதிப்புகள் யாவற்றிலும் இந்த விளைவு சமமாக இருக்கின்றது.

$$\sum_j \beta_j = 0$$

$(\alpha\beta)_{ij} = i$ஆவது நடத்து முறைக்கும், jஆவது ரெப்லிகேசனுக்குமான விளைவு.

$$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

ϵ_{ijk} = பூச்சியம் கூட்டிடையுடனும், σ^2 மாறுபாட்டுடனும் சாராமல் இயல்நிலையில் பரவியுள்ள ராண்டம் விளைவு.

இப் பரிசோதனையின் நோக்கம் நடத்து முறைகள் சமமான விளைவுகளைக் கொண்டனவா என்பதைச் சோதிப்பதாகும். அத்துடன் ரெப்லிகேசன்களிடையே வேறுபாடுகள் இருக்கின்றனவா என்பதையும், நடத்துமுறைகளுக்கும் ரெப்லிகேசன்களுக்குமிடையே இடை விளைவு உள்ளதா என்பதையும் சோதித்தறியலாம். எனவே, இச் சோதனையில் சோதிக்கப்படும் எடுகோள்கள்:

$$H_1 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$$

$$H_2 = \beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_n = 0.$$

இவ்வெடுகோள்களைச் சோதனை செய்யக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கீடுகள் செய்யப்படுகின்றன.

முதலில் ஒவ்வோர் அறையிலுமுள்ள மதிப்புகளைக்கொண்டு அட்டவணை பின் வருமாறு அமைக்கப்படுகின்றது:

அட்டவணை 3.3.2.

நடத்து முறைகள்

		1	2	…	i	…	m	மொத்தம்
	1	$T_{11\cdot}$	T_{21}	…	T_{i1}	…	T_{m1}	$T_{\cdot 1 \cdot}$
	2	$T_{12\cdot}$	T_{22}	…	T_{i2}	…	T_{m2}	$T_{\cdot 2 \cdot}$
ரெப்ளிகேசன்கள்	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	j	T_{1j}	T_{2j}	…	T_{ij}	…	T_{mj}	$T_{\cdot j \cdot}$
		⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	n	T_{1n}	T_{2n}	…	T_{in}	…	T_{mn}	$T_{\cdot n \cdot}$
மொத்தம்		$T_{1\cdot\cdot}$	$T_{2\cdot\cdot}$	…	$T_{i\cdot\cdot}$	…	$T_{m\cdot\cdot}$	T

இனி வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளுக்கான சூத்திரங்களைக் காணலாம். சூத்திரங்களில் கீழ்க்கண்ட குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

$$\bar{x} = \frac{1}{mnp} \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} \sum_{k}^{p} x_{ijk} = \frac{T}{mnp}$$

$$\bar{x}_{i\cdot\cdot} = \frac{1}{np} \sum_{j}^{n} \sum_{k}^{p} x_{ijk} = \frac{T_{i\cdot\cdot}}{np}$$

$$\bar{x}_{\cdot j \cdot} = \frac{1}{mp} \sum_{i}^{m} \sum_{k}^{p} x_{ijk} = \frac{T_{\cdot j \cdot}}{mp}$$

$$\bar{x}_{ij.} = \frac{1}{p} \sum_k x_{ijk} = \frac{T_{ij.}}{p}$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது.

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S = \sum_i^m \sum_j^n \sum_k^p (x_{ijk} - \bar{x})^2$$

$$\sum \sum \sum (x_{ijk} - \bar{x})^2 = \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{x}_i - \bar{x})^2 + \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{x}_{.j.} - \bar{x})^2$$

$$+ \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{.i.} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x})^2 + \sum_i \sum_j \sum_k (x_{ijk} - \bar{x}_{ij})^2$$

$$= np \sum_i (x_{i.} - \bar{x})^2 + m\,p \sum_j (\bar{x}_{j} - \bar{x})^2$$

$$+ p \sum_i \sum_j (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{i.} + \bar{x})^2 + \sum_i \sum_j \sum_k (x_{ijk} - x_{ij.})^2$$

வலப் பக்கத்தில் உள்ள உறுப்புகள் பின்வருவனவற்றைக் குறிக்கின்றன:

$np \sum_i (\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2$ = நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

$mp \sum_j (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2$ = ரெப்லிகேசன் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

$p \sum_i \sum_j (\bar{x}_{ij.} - x_{i.} - \bar{x}_{j.} + x)^2$ = இடை விளைவு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

$\sum_i \sum_j \sum_k (\bar{x}_{ij} - {}_k x_{ij.})^2$ = சேர்வுகளகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (Within combinations sum of squares).

கணக்கிடுவதற்கு எளிதாக இருக்கும் பொருட்டு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S = \sum_i \sum_j \sum_k (x_{ijk} - \bar{x})^2$$

$$= \sum_j \sum_j \sum_k x_{ijk}^2 - \frac{T^2}{mnp}$$

நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S_1 = np \sum_i (\bar{x}_{i..} - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{np} \sum_i T_{i..}^2 - \frac{T^2}{mnp}$$

ரெப்லிகேசன் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S_2 = mp \sum_j (\bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$= \frac{1}{mp} \sum_i T^2_{.j.} - \frac{T^2}{mnp}$$

சேர்வுகளகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sum_i \sum_j \sum_k (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2$$

$$S_4 = \sum_i \sum_j \sum_k x^2_{ijk} - \sum_i \sum_j \sum_k \frac{T_{ij}^2}{p}$$

இடை வினைவு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= S_3$

$$S_3 = S - (S_1 + S_2 + S_4)$$

வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளை அவற்றிற்குரிய வரையற்ற பாகைகளுடன் அட்டவணையில் குறிப்பிடலாம்.

அட்டவணை 3.3.3.

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி
நடத்து முறைகள்	$m-1$	$\frac{1}{np}\sum_i T_{i..}^2 - \frac{T^2}{mnp} = S_1$	$S_1/_{m-1} = S'_1$
ரெப்லிகேசன்கள்	$n-1$	$\frac{1}{mp}\sum_i T_{.j.}^2 - \frac{T^2}{mnp} = S_2$	$S_2/_{n-1} = S'_2$
இடை விளைவு	$(m-1)(n-1)$	$S - S_1 - S_2 - S_4 = S_3$	$S_3/_{(m-1)(n-1)} = S'_3$
சேர்வுகளகத்தே	$mn(p-1)$	$\sum_i \sum_j \sum_k x_{ijk}^2 - \frac{1}{p}\sum\sum T_{ij.}^2 = S_4$	$S_4/_{mn(p-1)}$
மொத்தம்	$mnp-1$	$\sum_i \sum_j \sum_k x_{ijk}^2 - \frac{T^2}{mnp}$	

இடை விளைவுகள் இல்லாதபோது, இடை விளைவு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி S'_3-ம், சேர்வுகளகத்தே வர்க்கங்களில் கூட்டுத் தொகை சராசரி S'_4-ம் முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2-ன் மதிப்பீடுகள் ஆகும். அதாவது, $E(S'_3) = \sigma^2$; $E(S'_4) = \sigma^2$. எனவே, S'_3/S'_4 என்ற விகிதத்தின் மதிப்பைக் கொண்டு இடை விளைவுகளைச் சோதிக்கலாம். இடை விளைவுகள் இல்லை என்ற எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது, S'_3/S'_4 என்ற விகிதம், $(m-1)(n-1), mn(p-1)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட F ஆகப் பரவியுள்ளது.

$S'_3/S'_4 = F \geq F_{\alpha, (m-1)(n-1), mn(p-1)}$ ஆக இருந்தால் இடை விளைவுகள் இல்லை என்ற எடுகோள் ஏற்கத் தகாததெனத் தள்ளப்படுகின்றது.

நடத்து முறைகளின் விளைவுகள் இல்லாதபோது,

$E(S'_1) = \sigma^2$; $E(S'_4) = \sigma^2$ எனவே,

S'_1/S'_4 என்ற விகிதத்தின் மதிப்பைக்கொண்டு நடத்து முறை விளைவுகளைச் சோதிக்கலாம். $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ என்ற எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும்பொழுது, S'_1/S'_4-ன் பரவல் $(m-1), mn(p-1)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட F ஆக உள்ளது. எனவே,

$S'_1/S'_4 = F \geq F_{\alpha, (m-1), mn(P-1)}$ ஆக இருந்தால். $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ என்ற எடுகோள் ஏற்கத் தகாதெனத் தள்ளப்படுகின்றது.

இதே போல,

$S'_2/S'_4 = F \geq F_{\alpha, (n-1) mn (p-1)}$ ஆக இருந்தால் $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta n = 0$ என்ற எடுகோள் ஏற்கத்தகாதெனத் தள்ளப்படுகின்றது.

இடை விளைவுகள் இல்லை எனில்,

$$E(S'_3) = \sigma^2; E(S'_4) = \sigma^2.$$

அதாவது, இடை விளைவுகள் இல்லை எனில், S'_3-ம், S'_4-ம் முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடுகள் ஆகும். எனவே, இடை விளைவுகள் இல்லாதபோது, S_3, S_4 ஆகியவற்றின் கூட்டுத் தொகை சராசரி முழுமைத் தொகுதி மாறுபாடு σ^2-ன் ஒரு நல்ல மதிப்பீடாக அமையும் எனத் தெரிகின்றது. அதனால் கீழ்க்கண்ட முறை மேற்கொள்ளப்படுகின்றது

$S'_3/S'_4 < 2F_{.05, (m-1)(n-1), mn(p-1)}$ ஆக இருந்தால், இடை விளைவு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை + சேர்வுகள கத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை = பிழை வர்க்கங் களின் கூட்டுத் தொகை = S_e எனக் கொள்ளப்பட்டு சோதனை செய்யப்படுகின்றது. S_e-க்கு உரிய வரையற்ற பாகைகள்

$$= (m-1)(n-1) + mn(p-1).$$
$$= mnp - m - n + 1$$

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி

$$= \frac{Se}{mnp-m-n+1}$$
$$= S_e'$$

S'_4க்கு பதிலாக S_e'ஐப் பயன்படுத்தி நடத்துமுறை விளைவு களும் ரெப்லிகேசன் விளைவுகளும் சோதிக்கப்படுகின்றன.

ஒவ்வோர் அறையிலும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மதிப்புகளைக் கொண்ட இருவழிப் பாகுபாட்டிற்கான எடுத்துக்காட்டு ஒன்றைக் காண்போம்.

அட்டவணை 3.3.4 நிரல்கள்

வரிசைகள்	1	2	3	4
1	49	45	56	68
	43	43	49	54
2	46	50	48	63
	53	49	55	66
3	50	49	51	62
	46	48	61	63
4	56	51	50	63
	50	50	59	67
5	52	53	50	68
	57	56	65	66
				2180

கணக்கீடுகள்

முதலில் அறைகளில் உள்ள மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகைகளைக் கொண்ட அட்டவணையை அமைக்கலாம்.

அட்டவணை 3.3.5 **நிரல்கள்**

	1	2	3	4	மொத்தம்
1	92	88	105	122	407
2	99	99	103	129	430
வரிசைகள் 3	96	97	112	125	430
4	106	101	109	130	446
5	109	109	115	134	467
மொத்தம்	502	494	544	640	2180

(1) $\text{சரியீட்டளவு} = \frac{T^2}{mnp} = \frac{2180^2}{40} = \frac{4752400}{40}$

$= 118810{\cdot}00$

(2) $\sum_i \sum_j \sum_k x_{ij}^2 = 49^2 + 43^2 + 46^2 + \ldots + 67^2 + 68^2 + 66^2$

$= 120916{\cdot}00$

(3) $\frac{1}{np} \sum_i T_i^2. = \frac{502^2 + 494^2 + 544^2 + 640^2}{10}$

$= \frac{1201576}{10} = 120157.60$

(4) $\frac{1}{mp} \sum_j T._j^2. = \frac{952454}{8}$

$= 119056{\cdot}75$

(5) $\frac{1}{p} \sum_i \sum_j T_{ij}.^2 = \frac{92^2 + 99^2 + \ldots + 130^2 + 134^2}{2}$

$$= \frac{240924}{2}$$

$$= 120462.00$$

(6) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= S$

$= (2)—(1)$

$= 2106.40$

(7) நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= S_1$

$= (3) — (1)$

$= 1347.60$

(8) வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= S_2$

$= (4) — (1)$

$= 246.75$

(9) சேர்வுகளகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= S_4$

$= (2 — (5)$

$= 454.00$

(10) இடை விளைவு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= S_3$

$= S—S_1—S_2—S_4$

$= 57.65$

அட்டவணை 3.3.6

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு 5%
நிரல்கள்	3	1347.60	449.20	19.79	3.10
வரிசைகள்	4	246.75	61.69	2.72	2.87
இடை விளைவு	12	57.65	4.80	·21	2.28
சேர்வு களகத்தே	20	454.00	22.70		
மொத்தம்	39	2106.00			

$$2F_{.50;12;20} = 2 \times .977 = 1.954$$

$$\frac{S'_3}{S'_4} = \cdot 21 < 2F._{50,12,20} = 1.954$$

எனவே, இடை விளைவு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையையும், சேர்வுகளகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையையும் ஒன்று சேர்த்து பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணையை அமைக்கலாம்.

அட்டவணை 3.3.7

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு 5%
நிரல்கள்	3	1347·60	449.20	28·11	2.90
வரிசைகள்	4	246·75	61·69	3·86	2·67
பிழை	32	511·65	15.98		
மொத்தம்	39	-			

இடை விளைவு இல்லை எனக்கொண்டு சோதிக்கும் பொழுது நிரல்களின் விளைவுகளும், வரிசைகளின் விளைவுகளும் 5 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையனவாக இருப்பதைக் காணலாம்.

4. லட்டீன் சதுரம்

லட்டீன் சதுரத்தில் மூன்று தனிச் சிறப்புப் பண்புகளின் அடிப்படையில் மதிப்புகள் வகைப்படுத்தப்படுகின்றன. ஒரு பண்பின் பிரிவுகள் நிரல்களாலும், மற்றொன்றின் பிரிவுகள் வரிசைகளாலும், மூன்றாவதின் பிரிவுகள் $A, B, C, D \ldots$ என்ற எழுத்துகளாலும் குறிக்கப்படுகின்றன. நிரல்கள், வரிசைகள், $A, B, C, D \ldots$ என்ற எழுத்துகள் ஆகியவை சம எண்ணிக்கையில் இருக்கின்றன. $A, B, C, D \ldots$ என்ற எழுத்துகள் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு நிரலிலும் ஒரு முறையும், ஒவ்வொரு வரிசையிலும் ஒரு முறையும் அமைகின்றன.

m நிரல்களும், m வரிசைகளும், m எழுத்துகளும் கொண்ட m படியுணையுடைய லட்டீன் சதுரம் (Latin Square of Order m) '$m \times m$ லட்டீன் சதுரம்' எனக் குறிக்கப்படுகின்றது. ($m \times m$ லட்டீன் சதுரத்தில்) ஒவ்வோர் எழுத்தும் m தடவைகள் வருகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, 6×6 லட்டீன் சதுரம் பின் வருமாறு அமைந்துள்ளது.

நிரல்கள்

வரிசைகள்	1	2	3	4	5	6
1	*D*	*A*	*C*	*F*	*E*	*B*
2	*B*	*F*	*A*	*D*	*C*	*E*
3	*F*	*E*	*D*	*B*	*A*	*C*
4	*A*	*B*	*E*	*C*	*D*	*F*
5	*C*	*D*	*B*	*E*	*F*	*A*
6	*E*	*C*	*F*	*A*	*B*	*D*

லட்டீன் சதுர அமைப்பை வேளாண்மைத் துறையின்பாற் பட்ட ஒரு பரிசோதனையால் விளக்கலாம். பரிசோதனையின் நோக்கம் ஒரு குறிப்பிட்ட தானியத்தின் விளைச்சல் m வகை உரங்களினாலும், நிலத்தின் பக்கங்களுக்கு இணையாக ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தான போக்குகளில் அமைந்துள்ள நிலவள வேறுபாடுகளினாலும் பாதிக்கப்படுவதைச் சோதிப்பதாகும். அதன் பொருட்டுப் பரிசோதனை நிலம், ஒரு குறிப்பிட்ட போக்கில் m இணை வரிசைகளாகவும், நேர் செங்குத்துப் போக்கில் m இணை நிரல்களாகவும் பிரிக்கப்படுவதினால், m^2 சிறு நிலக் கூறுகள் ஏற்படுகின்றன. ஒவ்வோர் வரிசையிலுமுள்ள m நிலக்கூறுகளில், ஒரே நிரலைச் சேர்ந்த இரு கூறுகள் ஒரே வகையான உரத்தைப் பெருதவாறு m உர வகைகளும் m^2 நிலக் கூறுகளில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இந்த லட்டீன் சதுர

அமைப்பில் நிரல்களும் வரிசைகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்துப் போக்குகளில் அமைந்துள்ள நிலவள வேறுபாடுகளைக் குறிக்க, A, B, C, D ... என்ற எழுத்துகள் நடத்து முறைகளைக் (உரவகைகள்) குறிக்கின்றன.

$m \times m$ லட்டீன் சதுரத்தில் தரப்பட்டுள்ள விவரங்களை ஆராய அவ் விவரங்களிலிருந்து பெறப்படும் மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. அப் பகுதிகளாவன:

S_t = நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

S_c = நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

S_r = வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

S_e = பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

அதாவது,

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S_T = S_t + S_c + S_r + S_e.$$

இவ் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளுக்கானச் சூத்திரங்களை இருவழிப் பிரிவிற்கு உள்ள முடிவுகளைச் சிறிது விரிவு படுத்துவதன் மூலம் பெறலாம்.

இரு வழிப் பிரிவில்,

x_{ij} = i ஆவது நிரலில் j ஆவது வரிசையில் உள்ள மதிப்பு.

$$i = 1, 2, \dots m; \quad j = 1, 2, \dots m$$

$\bar{x}_{.i}$ = i ஆவது நிரலின் கூட்டிடை.

$\bar{x}_{.j}$ = j ஆவது வரிசையின் கூட்டிடை

$\bar{x}_{..}$ = பொதுக் கூட்டிடை (Grand Mean) எனில்,

$$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_i (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2 + \sum_j (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2$$

$$+ \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{j.} - \bar{x}_j + \bar{x})^2$$

அதாவது,

மொத்த விர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை = நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை + வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை + பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

லட்டீன் சதுரத்தில், இரு வழிப் பிரிவிலுள்ள பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையானது, நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை என இரண்டாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது.

எனவே, லட்டீன் சதுரத்தில்,

$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..})^2$ = நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை + பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$(x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..}) = y_{ij}$ எனக் கொண்டால்,

$$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..})^2 = \sum_i \sum_j y_{ij}^2$$

$\sum_i \sum_j y_{ij}^2$ ஐ, $A, B, C, D\ldots$ என்ற எழுத்துகள் குறிக்கும் நடத்து முறைகளின் கூட்டிடைகளைப் பொறுத்து ஒரு வழிப் பிரிவில் பிரித்ததைப் போன்று பிரிக்கலாம்.

y_{ij}-ல் உள்ள $x_{ij}, \bar{x}_{j.}, \bar{x}_{.i}, \bar{x}_{..}$ ஆகியவை ஒவ்வொன்றின் கூட்டிடையும் $\bar{x}_{..}$ ஆகும். எனவே, y_{ij} மதிப்புகளின் பொதுக் கூட்டிடை

$$\bar{y}_{..} = 0$$

k ஆவது எழுத்து குறிக்கும் நடத்து முறையின் கூட்டிடையாகி $\bar{y}_k$ ஐக் கணக்கிட y_{ij}-ல் உள்ள உறுப்புகள் நான்கினையும் தனித்தனியாகக் கணக்கில் கொள்ளவேண்டும். k ஆவது எழுத்துக்கான x_{ij} மதிப்புக்களின் கூட்டிடை $\bar{x}_k$. ஒவ்வோர் நிரலிலும் k ஆவது எழுத்து ஒரே தடவை வருவதால் $\bar{x}_{i.}$ மதிப்புகளின் கூட்டிடை $\bar{x}_{..}$ இதேபோல $\bar{x}_{.ij}$ மதிப்புகளின் கூட்டிடை $\bar{x}_{..}$ ஆகும். கடைசி உறுப்பாகிய $\bar{x}_{..}$ மாறுத்தன்மையுடையது.

எனவே,

$$\bar{y}_k = \bar{x}_k - \bar{x}_{..} - \bar{x}_{..} + \bar{x}_{..}) = (\bar{x}_k - \bar{x}_{..}) \quad k = 1, 2, \ldots m$$

ஆகவே,

$$\sum_i \sum_j (\overline{y}_{ij} - \overline{x}_{..})^2 = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \overline{y}_k + \overline{y}_k - \overline{y}_{..})^2$$

$$\sum_i \sum_j y_{ij}^2 = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \overline{y}_k)^2 + m \sum_k (\overline{y}_k - \overline{y}_{k..})^2$$

$$= \sum_i \sum_j (x_{ij} - \overline{x}_{i.} - \overline{x}_{i.} - \overline{x}_k + 2\overline{x}_{..})^2 + m \sum_k (\overline{x}_k - \overline{x}_{..})^2$$

அதாவது,

$$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \overline{x}_i - \overline{x}_j + \overline{x}_{..})^2 = m \sum_k (\overline{x}_k - \overline{x}_{..})^2$$

$$+ \sum_i \sum_j (x_{ij} - \overline{x}_{i.} - \overline{x}_{.j} - \overline{x}_k + 2\overline{x}_{..})^2$$

எனவே,

$$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \overline{x}_{..})^2 = m \sum_i (\overline{x}_{i.} - \overline{x}_{..})^2$$

$$+ m \sum_j \overline{x}_{.j} - \overline{x}_{..})^2 + m \sum_k \overline{x}_k - \overline{x}_{..})^2$$

$$+ \sum_i \sum_j (x_{ij} - \overline{x}_{i.} - \overline{x}_{.j} \overline{x}_k + 2(\overline{x}_{..})^2$$

இதில்,

$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \overline{x}_{..})^2$ = மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $(m^2 - 1)$.

$m \sum_i (\overline{x}_i - \overline{x})^2$ = நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $(m-1)$.

$m \sum_j (\overline{x}_{i.} - \overline{x}_{..})^2$ = வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $(m - 1)$

$m \sum_k (x_k - \overline{x}_{..})^2$ = நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $(m - 1)$

$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j.} - \bar{x}_k + 2\bar{\bar{x}}_{.})^2 =$ பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $(m - 1)\, m - 2)$.

கணக்கிடுவதற்கு எளிதாக இருக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளுக்குரிய சூத்திரங்களைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$C_i = i$ஆவது நிரலின் கூட்டுத் தொகை. $i = 1, 2, \ldots m.$

$R_j = j$ஆவது வரிசையின் கூட்டுத் தொகை. $j = 1, 2, \ldots m$

$T_k = k$ஆவது நடத்து முறையின் கூட்டுத் தொகை, $k = 1, 2 \ldots m$

$T=$கூட்டுத் தொகைகளின் மொத்தம் எனக் கொண்டால்,

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S_T = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{T^2}{m^2}$$

நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S_c = \frac{1}{m} \sum_i C_i^2 - \frac{T^2}{m^2}$$

வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S_r = \frac{1}{m} \sum_j R_j^2 - \frac{T^2}{m^2}$$

நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S_t = \frac{1}{m} \sum_k T_k^2 - \frac{T^2}{m}$$

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= Se = S_T - (S_c + S_r + S_t).$$

இவ்வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளைப் பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

அட்டவணை 3.4.1

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி
நிரல்கள்	$(m-1)$	$S_c = \frac{1}{m} \sum_i C_i^2 - T^2/m^2$	$S_c/_{m-1} = S_c^+$
நிரைகள்	$(m-1)$	$S_r = \frac{1}{m} \sum_j R^2{}_j - T^2/m^2$	$S_r/_{m-1} = S_r^+$
நடத்து முறைகள்	$(m-1)$	$S_t = \frac{1}{m} \sum_k T_k^2 - T^2/m^2$	$S_t/_{m-1} = S_t^+$
பிழை	$(m-1)(m-2)$	$S_e = S_T - (S_b + S_r + S_t)$	$\frac{S_e}{(m_{-1})(m_{-2})} = S_e^+$
மொத்தம்	$m^2 - 1$	$S_T = \sum_i \sum_j x_i^2{}_j - T^2/m^2$	

லட்டீன் சதுரத்தின் தற்கோள்களும் எடுகோள்களும்

நிரல்களின் விளைவுகளும், வரிசைகளின் விளைவுகளும், நடத்து முறைகளின் விளைவுகளும், ராண்டம் விளைவுகளும் கூட்டப்படக் கூடியவை எனக் கொள்ளப்படுகிறது. அதாவது iஆவது நிரலில், jஆவது வரிசையில் kஆவது நடத்து முறையைக் கொண்டுள்ள x_{ijk} என்ற மதிப்பை ஐந்து விளைவுகளின் கூடுதலாக எழுதலாம்.

$$x_{ijk} = \mu + \gamma_i + \rho_j + \tau_k + \epsilon_{ijk}$$

இதில்

μ = லட்டீன் சதுரத்திலுள்ள எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொதுவான விளைவு.

γ_i = iஆவது நிரலின் நிலையான விளைவு iஆவது நிரலில் உள்ள மதிப்புகள் யாவற்றிற்கும் இது சமமாக இருக்கும். m நிரல்களின் விளைவுகளின் மொத்தம் பூச்சியத்திற்குச் சமமாக இருக்கும்.

அதாவது $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 0$.

ρ_j = jஆவது வரிசையின் நிலையான விளைவு. jஆவது வரிசையில் உள்ள மதிப்புகள் யாவற்றிற்கும் இது சமமாக இருக்கும். m வரிசைகளின் விளைவுகளின் மொத்தம் பூச்சியத்திற்குச் சமம்.

$$\sum_{j=1}^{m} \rho_j = 0.$$

τ_k = kஆவது நடத்து முறையின் நிலையான விளைவு. kஆவது நடத்து முறையைப் பெற்ற மதிப்புகள் யாவற்றிற்கும் இது சமமாக இருக்கும். m நடத்து முறைகளின் விளைவுகளின் மொத்தம் பூச்சியத்திற்குச் சமம்.

அதாவது $\sum_{k=1}^{m} \tau_k = 0$.

ϵ_{ijk} = ராண்டம் விளைவுகள். இவை பூச்சியம் கூட்டிடையுடன் σ^2 மாறுபாட்டுடன் ஒன்றையொன்று சாராது. இயல் நிலையில் பரவியுள்ளன.

லட்டீன் சதுரத்தில் சோதிக்கப்படும் எடுகோள்கள்

H_1: $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_m = 0$ (ஒவ்வொரு நிரலின் விளைவும் பூச்சியத்திற்குச் சமம்.)

H_2: $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = 0$ (ஒவ்வொரு வரிசையின் விளைவும் பூச்சியத்திற்குச் சமம்.)

H_3: $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_m = 0$ (ஒவ்வொரு நடத்து முறையின் விளைவும் பூச்சியத்திற்குச் சமம்.)

வரிசைகள், நடத்து முறைகள் ஆகியவற்றின் விளைவுகள் இருப்பினும் அல்லது இல்லாதிருப்பினும், அவற்றினைச் சாராது ஒவ்வொரு நிரலின் விளைவும் பூச்சியத்திற்குச் சமம் என்ற எடுகோள் சோதிக்கப்படுகிறது. இதேபோல, நிரல்களின் விளைவுகளையும், நடத்து முறைகளின் விளைவுகளையும் சாராது ஒவ்வொரு வரிசையின் விளைவும் பூச்சியத்திற்குச் சமம் என்ற எடுகோள் சோதிக்கப்படுகின்றது. இவ்வாறே நிரல்கள், வரிசைகள் ஆகியவற்றின் விளைவுகளைச் சாராது நடத்து முறைகள் பற்றிய எடுகோள் சோதிக்கப்படுகின்றது.

எடுகோள்கள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது S_c^+, S_r^+, S_t^+, S_e^+ ஆகிய நான்கும் முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2-ன் மதிப்பீடுகள் ஆகும். அதாவது எடுகோள்கள் உண்மையாக இருக்கும்பொழுது, $E(S_c^+) = \sigma^2$; $E(S_r^+) = \sigma^2$; $E(S_t^+) = \sigma^2$; $E(S_e^+) = \sigma^2$. முதல் எடுகோள் உண்மையாக இல்லாமல் இருக்கும் பொழுது $E(S_c^+)$-ன் மதிப்பு σ ஐ விட அதிகமாக இருக்கும். ஆனால் $E(S_e^+) = \sigma^2$ ஆகவே இருக்கும். எனவே, $\frac{S_c^+}{S_e^+}$ என்ற விகிதத்தின் மதிப்பு ஒன்றைவிட குறிப்பிடத் தகுந்த அளவு அதிகமாக இருப்பது எடுகோள் உண்மையானதன்று என்பதைக் காட்டும். $\frac{S_c^+}{S_e^+}$ என்ற விகிதத்தின் பரவலைக் கொண்டு முதல் எடுகோளைச் சோதனையிடலாம். முதல் எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது S_c^+/σ^2, $(m-1)$ வரையற்ற பாகைகளுடன் 'கை' வர்க்க

மாகவும் S_e^+/σ^2, $(m-1)(m-2)$ வரையற்ற பாகைகளுடன் 'கை' வர்க்கமாகவும் ஒன்றையொன்று சாராது பரவியுள்ளன. எனவே, $\frac{S_c^+}{S_e^+}$ என்ற விகிதம், எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது, $(m-1)$, $(m-1)$ $(m-2)$ வரையற்ற பாகைகளுடன் F முறையில் பரவியுள்ளது. $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots \gamma_m = 0$ என்ற எடுகோள்,

$\frac{S_c^+}{S_e^+} = F \geq F\alpha, _{(m-1), (m-1), (m-2)}$ ஆக இருக்கும் பொழுது தள்ளப்படுகிறது. α என்பது பொருளுடைய மட்டத்தைக் (level of significance) குறிக்கின்றது.

இதே போல, $\frac{S_r^+}{S_e^+}$ என்ற விகிதம் இரண்டாவது எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது, $(m-1)$, $(m-1)$ $(m-2)$ வரையற்ற பாகைகளுடன் F ஆகப் பரவியுள்ளது. $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = 0$ என்ற எடுகோள்,

$\frac{S_r^+}{S_e^+} = F \geq F_{\alpha, (m-1), (m-1), (m-2)}$ ஆக இருக்கும் பொழுது தள்ளப்படுகின்றது.

H_3 : $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_m = 0$ உண்மையாக இருக்கும் பொழுது $\frac{S_t^+}{S_e^+}$, $(m-1)$, $(m-1)$ $(m-2)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட F ஆகப் பரவியுள்ளது.

$\frac{S_t^+}{S_e^+} = \geq F_{\alpha, (m-1), (m-1)(m-2)}$ ஆக இருப்பின் எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுகின்றது. நடத்து முறைகளின் விளைவுகளிடையே வேறுபாடுகள் உள்ளன என்ற முடிவிற்கு வருகிறோம்.

கணக்கிடும் முறை : எடுத்துக்காட்டு :

5×5 லட்டீன் சதுரத்தில் விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. நிரல்களின் விளைவுகளையும், நடத்து முறைகளின் விளைவுகளையும் சோதனையிடுகிறோம்.

அட்டவணை 3. 4. 2 நிரல்கள்

வரிசைகள்.

	1	2	3	4	5	மொத்தம்
1	*C* 35	*B* 51	*A* 73	*D* 31	*E* 24	214
2	*B* 55	*A* 75	*E* 34	*C* 85	*D* 44	293
3	*D* 44	*C* 59	*B* 44	*E* 45	*A* 62	254
4	*E* 25	*D* 36	*C* 47	*A* 49	*B* 55	212
5	*A* 59	*E* 39	*D* 39	*B* 75	*C* 71	283
மொத்தம்	2 18	260	237	285	256	1256

A, *B*, *C*, *D*, *E* என்ற நடத்து முறைகளின் மொத்தங்களைக் காணக் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையை அமைக்கிறோம்.

அட்டவணை 3. 4. 3 நடத்து முறைகள்

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
	73	51	35	31	24	
	75	55	85	44	34	
	62	44	59	44	45	
	49	55	47	36	25	
	59	75	71	39	39	
மொத்தம்	318	280	297	194	167	1256

எடுகோள்கள் :

(i) நிரல்களின் விளைவுகளில் வேறுபாடுகள் இல்லை.

$$H_1 : \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0$$

(ii) வரிசைகளின் விளைவுகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை.

$$H_2 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = 0$$

(iii) நடத்து முறைகளின் விளைவுகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை.

$$H_3 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau_5 = 0$$

இவ் வெடு கோள்களைச் சோதனையிட கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிட்டு மாறுபாட்டு ஆய்வு அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

(1) சரியீட்டளவு : $$\frac{T^2}{m^2} = \frac{1256^2}{25} = \frac{1577536}{25}$$

$$= 63101.44$$

(2) $$\sum_i \sum_j x_{ij}^2 = 35^2 + 55^2 + \dots + 55^2 + 71^2$$

$$= 69626.00.$$

(3) $$\frac{1}{m} \sum_i C_i^2 = \frac{218^2 + 260^2 + 237^2 + 285^2 + 256^2}{5}$$

$$= 63610.80$$

(4) $$\frac{1}{m} \sum_j R_j^2 = \frac{214^2 + 293^2 + 254^2 + 212^2 + 283^2}{5}$$

$$= 64238.80$$

(5) $$\frac{1}{m} \sum_k T_k^2 = \frac{318^2 + 280^2 + 297^2 + 194^2 + 167^2}{5}$$

$$= 66651.60$$

(6) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$= S_T = (2)\ (1)$

$= 6524.56$

(7) நிரல்கள் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$= S_c = (3) - (1)$

$= 509\ 36$

(8) வரிசைகள் வர்க்கங்களின்

கூட்டுத் தொகை $= S_r\ (4) - (1)$

$= 1137.36$

(9) நடத்துமுறை வர்க்கங்களின்

கூட்டுத் தொகை $= S_t = (5) - (1)$

$= 3550{\cdot}16$

(10) பிழை வர்க்கங்களின்

கூட்டுத் தொகை $= S_e = S_T - (S_c + S_r + S_t)$

$= (6) - [\ (7) + (8) + (9)\ ]$

$= 1327.68$

அட்டவணை 3 4.4

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு 5%	1%
நிரல்கள்	4	509·36	127·34	1·15	3·26	5·41
வரிசைகள்	4	1137·36	284·34	2·57	3·26	5·41
நடத்து முறைகள்	4	3550·16	887·54	8·02	3·26	5·41
பிழை	12	1327·68	110·64			
மொத்தம்	24	6524·56				

(i) $F = 1.15 < F_{.05, 4, 12} = 3.26$ ஆக இருப்பதால், நிரல்களின் விளைவுகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற முடிவிற்கு வருகிறோம்.

(ii) $F = 2.57 < F_{.05, 4, 12} = 3.26$ ஆக இருப்பதால் வரிசைகளின் விளைவுகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோளை ஒத்துக் கொள்கிறோம் (accept).

(ii) $F = 8.02 > F_{.05, 4, 12} = 3.26$ ஆக இருப்பதால் நடத்துமுறைகளின் விளைவுகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோளை நிராகரித்து, நடத்துமுறைகளின் விளைவுகளிடையே வேறுபாடுகள் உள்ளன என்ற முடிவிற்கு வருகிறோம்.

4. உடன் மாறுபாட்டாய்வு

குறிப்பிட்ட சிலவகை உரங்கள் குறிப்பிட்ட ஒரு தானியத்தின் விளைச்சல்களை எவ்வாறு பாதிக்கின்றன என்பதை ஒப்பிட்டு ஆராயும் பொழுது, நிலத்தின் வள வேறுபாடுகளுக்காகச் சரி செய்யப்பட்ட விளைச்சல்களை ஒப்பிட்டு ஆராய ஆய்வாளர் விரும்பலாம். ஏனெனில், விளைச்சல்கள் வேறுபட்ட உரங்களால் மட்டுமல்லாமல் நிலவள வேறுபாட்டாலும் பாதிக்கப்படுகின்றன. நல்ல வளமுடைய நிலப்பகுதியில் ஒரு குறிப்பிட்ட உரத்தைப் பயன்படுத்திப் பெறும் விளைச்சலுக்கும், வளமற்ற நிலத்தில் அதே உரத்தைப் பயன்படுத்திப் பெறும் விளைச்சலுக்கும் குறிப்பிடத் தகுந்த அளவில் வேறுபாடு இருக்கும் என்பதை யாவரும் அறிவர். எனவே, நிலத்தின் விளைச்சலும், நிலத்தின் வளமும் ஒன்றோடொன்று உடன் தொடர்புடையனவாக உள்ளன (are correlated) எனக் கூறலாம். மற்ற உரங்களுடன் ஒப்பிடும் பொழுது, ஒரு குறிப்பிட்ட வகை உரம் நல்ல வளமுடைய பகுதிகளிலேயே தற்செயலாகப் பயன்படுத்தப்பட்டிருப்பின், விளைச்சல்கள் உரங்களின் உண்மையான விளைவுகளைத் தெரிவிக்க மாட்டா என்பது தெளிவு. நிலப் பகுதிகள் இயற்கையிலேயே வள வேறுபாடுகளைக் கொண்டிருப்பதால், பரிசோதனைகளில் எல்லா உரங்களையும் சமமான வளங்கொண்ட நிலப்பகுதிகளிலேயே பயன்படுத்தி, விளைச்சல்களைப் பெற வேண்டும் என்பது நடைமுறைக்கு ஒவ்வாத தொன்று. எனவே, விளைச்சல்களை வள வேறுபாடுகளுக்காகச் சரிசெய்த பின்பு ஆராய்வது சிறந்த முறை எனலாம். உரங்களைப் பயன்படுத்திப் பெறும் விளைச்சல்களை y மாறியாகவும் (variable y), விளைச்சலோடு உடன் தொடர்பு கொண்ட (correlated) நிலவளத்தை உடனியங்குகின்ற மாறி (concomitant variable) x ஆகவும் கொள்ளலாம். உடனியங்குகின்ற மாறி x-ன் வேறுபாடுகளுக்காக y மாறியின் பிரிவுகளின் கூட்

டிடைகளைச் சரி செய்து வேறுபாடுகளின் முக்கியத்துவத்தைச் சோதனையிட உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வுமுறை பயன்படு கின்றது. இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உடன் தொடர் புடைய மாறிகள் (correlated variables) கொண்ட சோதனை களில் ஒரு படித்தான தன்மையைச் (homogeniety) சோதனை யிடும் முறையை 'உடன் மாறுபாட்டாய்வு' எனக் கூறுகிறோம். இந்த முறைக்கான இயற்கணிதக் கருவிகள் சிலவற்றைக் காண்போம்.

x, y என்ற மாறிகளின் மதிப்புகளை வரைப்படத்தில் குறிக்கும்பொழுது கிடைக்கும் சிதறல் விளக்கப்படம் (Scatter Diagram) இம் மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பைத் தெரியப் படுத்துகின்றது. இரு மாறிகளின் மதிப்புகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டைச் சுற்றி அதிகமாக அமைந் திருப்பின், ஒரு நேர்கோட்டின் மூலம் அம் மாறிகளிடையே உள்ள தொடர்பைக் கூற இயலும். மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பைப் பொருத்தமான முறையில் தெரிவிக்கும் நேர்கோடு தொடர்புக்கோடு (line of regression) எனப்படு கின்றது. மாறிகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகள் ஒரு வளைகோட்டைச் சுற்றி அமைந்திருப்பின், மாறிகளிடையே வளைகோட்டுத் தொடர்பு உள்ளது எனக் கொண்டு, அத் தொடர்பிற்குப் பொருத்தமான தொடர்பு வளைகோடு (Curve of regression) காண இயலும். தொடர்புக் கோட்டின் சமன்பாடும், தொடர்பு வளைகோட்டின் சமன்பாடும் மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சார்புடைத் தொடர்பைத் (functional relationship) தெரிவிக் கின்றன.

மாறிகளுக்கிடையே நேர்கோட்டுத் தொடர்பு இருப்பின், அத் தொடர்பிற்கு மிகச் சிறந்த முறையில் பொருந்தும் இரு தொடர்புக் கோடுகளை நிர்ணயிக்கலாம். ஒரு குறிப்பிட்ட நேர் கோட்டிலிருந்து மாறிகளின் மதிப்புகள் உள்ள விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் மற்ற எந்த நேர்கோட்டிலிருந்தும் உள்ள விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலைவிடக் குறைவாக இருப்பின், அக் குறிப்பிட்ட நேர்கோடு மிகச் சிறந்த முறையில் பொருந்தும் (best fit) நேர்கோடு எனப்படுகின்றது. x மாறியின் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் y-ன் மதிப்பீட்டைத் தரும் ஒரு தொடர்புக் கோட்டையும், y மாறியின் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் x-ன் மதிப்பீட்டைத் தரும் மற்றொரு தொடர்புக் கோட்டையும் நிர்ணயிக்க இயலும். முன்னது x-ன் மீதான y-ன் தொடர்புக் கோடு (line of regression of y on x) எனவும், பின்னது

y-ன் மீதான x-ன் தொடர்புக்கோடு (line of regression of x on y) எனவும் வழங்கப்படுகின்றன.

x-ன் மீதான y-ன் தொடர்புக் கோட்டின் சமன்பாடு,

$y - \bar{y} = b\,(x - \bar{x})$.

y-ன் மீதான x-ன் தொடர்புக் கோட்டின் சமன்பாடு,

$x - \bar{x} = b'\,(y - \bar{y})$.

இவற்றில் $\bar{x} - \bar{y}$ என்பன கூட்டிடைகள். b, b' முறையே x-ன் மீதான y-ன் தொடர்புக் கெழுவையும், y-ன் மீதான x-ன் தொடர்புக் கெழுவையும் குறிக்கின்றன.

$$b = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

$$b' = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma (y_i - \bar{y})^2}$$

எனவே,

$$bb' = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - x)^2} \; \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (y - \bar{y})^2}$$

$$= \gamma^2$$

γ என்பது மாறிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் (Correlative Co-efficient) குறிக்கின்றது.

மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாட்டிலிருந்து x-ன் மதிப்புகளுக்கான y-ன் மதிப்பீடுகளைப் பெறலாம். x_i-ன் மதிப்பிற்கு மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்பட்ட y_i-ன் மதிப்பீட்டை Y_i எனக் கொண்டால்,

$Y_i = \bar{y} + b\,(x_i - \bar{x})$

எனவே, தொடர்புக் கோட்டிலிருந்து y_i-ன் விலக்கம்,

$y_i - Y_i = y_i - \{\bar{y} + b\,(x_i - x\,\}$

இதிலிருந்து தொடர்புக் கோட்டிலிருந்து y மாறியின் மதிப்புகளின் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (Sum of squares of deviations),

$$\sum_i (y_i - Y_i)^2 = \sum_i \left[y_i - \{\bar{y} + b\,(x_i - \bar{x})\} \right]^2$$

$y_i - \bar{y} = Y$ எனவும், $x_i - \bar{x} = X$ எனவும் கொண்டால்,

$$\sum_i (y_i - Y_i)^2 = \Sigma\,(Y - b\,X)^2$$

$$= \Sigma\,(Y^2 - 2b\,X\,Y + b^2X^2)$$

$$= \Sigma\,(Y \;- 2b\,\Sigma\,X\,Y + b^2\,\Sigma\,X^2$$

இதில்,

$$b = \frac{\Sigma\,(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\Sigma\,XY}{\Sigma\,X^2}$$

எனவே,

$$\sum_i (y_i - Y_i)^2 = \Sigma\,Y^2 - \frac{2\,(\Sigma\,XY)\,(\Sigma\,XY)}{\Sigma X^2} + \left(\frac{\Sigma\,XY}{\Sigma\,X^2}\right)\Sigma\,X^2$$

$$= Y^2 - \frac{(\Sigma\,XY)^2}{\Sigma\,X^2}$$

$$= \sum_i (y_i - \bar{y}^2) - \frac{\{\sum_i (x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})\}}{\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2}$$

தொடர்புக் கோட்டிலிருந்து y-ன் மதிப்புகளின் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைத் தரும் மேற்கண்ட முடிவு உடன் மாறுபாட்டளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு நேர்கோட்டிலிருந்து மாறுபட்டு இருக்கும்பொழுது, தொடர்பைச் சிறந்த முறையில் குறிக்கும் தொடர்புச் சமன்பாட்டை நிர்ணயிக்க வேண்டும்.

நேர் கோட்டிலமையாதத் தொடர்புச் சமன்பாட்டின் எளிய வகை, ஒரு மாறியை மற்ற மாறியின் பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் குறிப்பதாகும். x–ன் மீது y-ன் பல்லுறுப்புத் தொடர்பு இவ்வாறு குறிக்கப்படுகின்றது:

$$y = b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_p x^p$$

y–ன் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் மீச்சிறிதாக (minimum) இருக்குமாறு $b_o, b_1, b_2 \dots b_p$ன் மதிப்புகள் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன.

மாறிகளின் தொடர்புச் சார்பினைச் சோதித்தல்

மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடு குறிப்பதைப்போல மாறிகளிடையேச் தொடர்பு உள்ளதா என்பதனைத் தொடர்புச் சார்பைச் சோதிப்பதால் அறியலாம்.

இரு மாறி இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ராண்டம் முறையில் எடுக்கப்பட்ட மாதிரியில் N இணை மதிப்புகள் உள்ளன எனவும், x, y மாறிகளிடையே நேர் கோட்டுத் தொடர்பு உள்ளது எனவும் கொள்வோம். y மாறியின் மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y})^2$ஐ இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம். தொடர்புச் சமன்பாட்டைக் கொண்டு பெறப்பட்ட y_i–ன் மதிப்பீடு Y_i எனில்,

$$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_i \sum_j (y_{ij} - Y_i + Y_i - \bar{y})^2$$

$$= \sum_i \sum_j (y_{ij} - Y_i)^2 + \sum_i \sum_j (Y_i - \bar{y})^2$$

$$+ 2 \sum \sum (y_{ij} - Y_i) + (Y_i - \bar{y}).$$

$$= \sum_i \sum_j (y_{ij} - Y_i)^2 + \sum_i n_i (Y_i - \bar{y})^2$$

இதில், $\sum_i \sum_j (y_{ij} - Y_i)^2$ என்பது தொடர்புச் சார்பிலிருந்து y–ன் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் குறிக்கின்றது.

$\sum n_i (Y_i - \bar{y})^2$ என்பது தொடர்புச் சார்பின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

உடன் தொடர்பற்ற இயல்நிலை முழுமைத் தொகை (uncorrelated normal population) என்ற தற்கோளின் கீழ்,

$$\frac{1}{N-1}\sum_i \sum_j (y_{ij}-\bar{y})^2 ,\ \frac{1}{N-2}\sum_i \sum_j (y_{ij}-Y_i)^2,\ \sum_i n_i (Y_i-\bar{y})^2$$

ஆகியவை முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ^2-ன் பிறழ்ச்சி யற்ற மதிப்பீடுகள் ஆகும். அதாவது,

$$E\left\{\sum_i \sum_j (y_{ij}-\bar{y})^2\right\} = (N-1)\,\sigma^2$$

$$E\left\{\sum_i \sum_j (y_{ij}-Y_i)^2\right\} = (N-2)\,\sigma^2$$

$$E\left\{\sum_i n_i (Y_i-\bar{y})^2\right\} = \sigma^2$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை, விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை, தொடர்புச் சார்பின் வர்க்கங் களின் கூட்டுத் தொகை ஆகியவற்றிற்கான வரையற்ற பாகைகள் முறையே $(N-1)$, $(\bar{N}-2)$, 1.

மேலே கூறியவைகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்தலாம்.

அட்டவணை 4.1.

வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி
தொடர்புச் சார்பு	$\sum_i n_i (Y_i-\bar{y})^2 = S_1$	1	$S_1 = S_1^+$
தொடர்புச் சார்பிலிருந்து விலக்கங்கள்	$\sum_i \sum_j (y_{ij}-Y_i)^2 = S_2$	$N-2$	$\frac{S_2}{N-2} = S_2^+$
மொத்தம்	$\sum_i \sum_j (y_{ij}-\bar{y})^2 = S.$	$N-1$	

மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடு காட்டியபடி மாறி களிடையே தொடர்பு உள்ளதா என்பதைச் சோதனையிட

$\frac{S_1^+}{S_2^+}$ என்ற விகிதத்தைக் கணக்கிடவேண்டும். இம் மதிப்பு பொருளுடைய வகையில் ஒன்றைவிட அதிகமாக உள்ளதா என்பதைக் கொண்டு மாறிகளிடையே உண்மையில் தொடர்பு உள்ளதா என்பதை முடிவு செய்யலாம். மாறிகளிடையே தொடர்பு இல்லை என்ற எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது $\frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y})^2}{\sigma^2}$, $\frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - Y_i)^2}{\sigma^2}$, $\frac{\sum_i n_i (Y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2}$ என்பன முறையே $(N-1)$, $(N-2)$, 1 வரையற்ற பாகைகளுடன் χ^2 ஆகப் பரவியுள்ளன. எனவே, எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது $\frac{S_1^+}{S_2^+}$ என்ற விகிதத்தின் பரவல் 1, $(N-2)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட F-பரவலாகும். எனவே,

$\frac{S_1^+}{S_2^+} = F \geq F_{\alpha, 1, N-2}$ ஆக இருந்தால், மாறிகளிடையே மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடு காட்டியவாறு தொடர்பு உள்ளது என முடிவு செய்கிறோம். α என்பது பொருளுடைய மட்டத்தைக் குறிக்கின்றது. பொதுவாக α-ன் மதிப்பு 5 சதவீதமாக அல்லது 1 சதவீதமாகக் கொள்ளப்படுகின்றது.

உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு—1: ஒருவழிப் பாகுபாடு

பரவற்படி ஆய்வு முறையில் மொத்த மாறுபாட்டை பகுதிகளாகப் பிரித்ததைப் போல உடன்மாறுபாட்டு ஆய்வில் இரு மாறிகள் கொண்ட மாதிரியின் மொத்த உடன் மாறுபாட்டைப் பல பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறோம். இரு மாறிகள் கொண்ட p முழுமைத் தொகுதிகள் (பிரிவுகள்) ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் எடுக்கப்பட்ட n_i மதிப்புகள் $(i = 1, 2, \ldots p)$ கொண்ட ராண்டம் மாதிரிக்கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

அட்டவணை 4.1.1 **பிரிவுகள்**

	1		2		…	i		…	p		
	x_{11}	y_{11}	x_{21}	y_{21}	…	x_{i1}	y_{i1}	…	x_{p1}	y_{p1}	
	x_{12}	y_{12}	x_{22}	y_{22}	…	x_{i2}	y_{i3}	…	x_{p2}	y_{p2}	
	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮	
	x_{1j}	y_{1j}	x_{2j}	y_{2j}		x_{ij}	y_{ij}		x_{pj}	y_{pj}	
	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮	
	x_{1n1}	y_{1n_1}	x_{2n2}	y_{2n2}		x_{ini}	y_{ini}		x_{pnp}	y_{pnp}	
மொத்தம்	$T_{x1.}$	$T_{y1.}$	$T_{x2.}$	$T_{y2.}$		$T_{xi.}$	$T_{yi.}$		$T_{xp.}$	$T_{yp.}$	$T_x T_y$
கூட்டிடை	$\bar{x}_1$	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_2$		$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$		$\bar{x}_p$	$\bar{y}_p$	$\bar{x}$ $\bar{y}$

இவ்வட்டவணையில் (x_{ij}, y_{ij}) என்பது i ஆவது பிரிவில் j ஆவது $(i = 1, 2, \ldots p; \; j = 1, 2, \ldots n_i)$ x, y இணை மதிப்புகளைக் குறிக்கின்றது. i ஆவது பிரிவில், $(i = 1, 2, \ldots p)$

$$Tx_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{ni} x_{ij} \quad Ty_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{ni} y_{ij}$$

மொத்த கூட்டுத் தொகை (Grand total) $\Big\} = Tx = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{ni} x_{ij}$

$$Ty = \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$$

i ஆவது பிரிவில் $(i = 1, 2, \ldots p)$ $\bar{x}_i = \dfrac{Txi}{n_i} \quad \bar{y}_i = \dfrac{T_{yi}}{n_i}$

பொதுக் கூட்டிடை (Grand Mean) $\Big\} = \bar{x} = \dfrac{1}{N} \sum_i \sum_j x_{ij} = \dfrac{T_x}{N}$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j y_{ij} = \frac{T_y}{N}$$

$$N = \sum_{i=1}^{P} n_i$$

பொதுக் கூட்டிடை $\bar{x}$ லிருந்து x_{ij}–ன் விலக்கத்தையும், $\bar{y}$-லிருந்து y_{ij}–ன் விலக்கத்தையும் பெருக்கி, எல்லா இணை மதிப்புகளுக்கும் $(i = 1, 2, \ldots p; \; j = 1, 2, = ni)$ கூட்டுத் தொகையைக் காணலாம்: இதை மொத்தப் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை (Total Sum of Product) எனக் குறிக்கலாம்.

மொத்தப் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{ni} (x_{ij} - \bar{x})(y_{ij} - \bar{y})$$

இதைப் பின் வருமாறு பிரிக்கலாம்:

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{ni} (x_{ij}-\bar{x})(y_{ij}-\bar{y}) = \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij}-\bar{x}_i+\bar{x}_i+\bar{x})(y_{ij}-\bar{y}_i+\bar{y}_i-\bar{y})$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij}-\bar{x}_i)(y_{ij}-\bar{y}_i)+\sum_{i} \sum_{j} (\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{y}_i-\bar{y}_i)$$

$$+ \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij}-\bar{x}_i)(\bar{y}_i-\bar{y})$$

$$+ \sum_{i} \sum_{j} (y_{ij}-\bar{y}_l)(\bar{x}_i-\ddot{x})$$

சமன்பாட்டின் வலது பக்கத்தில் உள்ள மூன்ருவது உறுப்பு,

$$\sum_{i} \sum_{j} (x_{ij}-\bar{x}_i)(\bar{y}_i-\bar{y}) = \sum_{i} (\bar{y}_i-\bar{y}) \sum_{j} (x_{ij}-\bar{x}_i)$$

ஆனுல் $\sum_{j} (x_{ij}-\bar{x}_j) = 0$

ஏனெனில், கூட்டிடையிலிருந்து மதிப்புகளின் விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியத்திற்குச் சமம்.

$$\therefore \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij}-\bar{x}_i)(\bar{y}_i-\bar{y}) = 0$$

இதே மாதிரி,

$$\sum_{i} \sum_{j} (y_{ij}-\bar{y}_i)(\bar{x}_i-\bar{x}) = 0$$

எனவே,

$$\sum_{i} \sum_{j} (x_{ij}-\bar{x})(y_{ij}-\bar{y}) = \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij}-\bar{x}_i)(y_{ij}-\bar{y}_l)$$

$$+ \sum_{i} \sum_{j} (\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{y}_l-\bar{y})$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij}-\bar{x}_i)(y_{ij}-\bar{y}_i) + \sum_{i} n_i (\bar{x}_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

இச் சமன்பாட்டில்,

$$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i) =$$ பிரிவுகளகத்தே பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை

$$\sum_i ni (\bar{x}_i - \bar{x})(\bar{y}_i - \bar{y}) =$$ பிரிவுகளிடையே பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை.

இனி,

$$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})(y_{ij} - \bar{y}) = S_{xy}$$

$$\sum_i n_i (\bar{x}_i - \bar{x})(\bar{y}_i - \bar{y}) = T_{xy}$$

$\sum \sum (x_{ij} - \bar{x}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i) = E_{xy}$ எனக் குறிக்கலாம்.

எனவே,

$$S_{xy} = T_{xy} + E_{xy}.$$

S_{xy}-க்கு உரிய வரையற்ற பாகைகள் $(N-1)$

T_{zy} க்கு உரிய வரையற்ற பாகைகள் $(p-1)$

E_{xy} க்கு உரிய வரையற்ற பாகைகள் $(N-p)$.

x, y மாறிகளின் N இணை மதிப்புகள் ஒரு படித்தான முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரி என்ற தற்கோளின் கீழ்,

$E(S_{xy}) = (N-1)\mu_{11}$ $\quad \mu_{11}$ = முழுமைத் தொகுதியின் உடன் மாறுபாடு.

ஒவ்வொரு பிரிவிலுமுள்ள மதிப்புகள் ஒருபடித்தான முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரிகள் என்ற தற்கோளின் கீழ்

$$E(E_{xy}) = (N-p)\mu_{11}$$

$$E(S_{xy}) = E(T_{xy}) + E(E_{xy})$$

$$\therefore \quad E(T_{xy}) = (p-1)\mu_{11}$$

ஆகவே, $\frac{S_{xy}}{N-1}$, $\frac{T_{xy}}{p-1}$ $\frac{E_{xy}}{N-p}$ என்பன முழுமைத் தொகுதியின் உடன் மாறுபாடு μ_{11}–ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடுகள் (unbiased estimates) ஆகும்.

இனி, முழுமைத் தொகுதியில் x மாறியின் மாறுபாடு σ_x^2-ன் மதிப்பீடுகளைக் காணலாம். பரவற்படி ஆய்வு ஒரு வழிப் பாகுபாட்டில் உள்ளவாறு,

$$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \sum_i n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

இச் சமன்பாட்டில்,

$\sum\limits_{i=j} \sum (x_{ij} - \bar{x})^2 = S_{xx}$ = மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

$\sum\limits_i n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = T_{xx}$ = பிரிவுகளிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

$\sum\limits_i \sum\limits_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 = E_{xx}$ = பிரிவுகளகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

S_{xx}, T_{xx}, E_{xx} ஆகியவற்றிற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் முறையே $(N-1)$, $(p-1)$, $(N-p)$.

x மாறியின் N மதிப்புகள் ஒரு படித்தான முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரி என்ற தற்கோளின் கீழ், $\frac{S_{xx}}{N-1}$ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ_x^2-ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடாகும்.

p பிரிவுகளில் உள்ள x மாறியின் மதிப்புகள் ஒரு படித்தான முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரிகள் என்ற தற்கோளின் கீழ், $\frac{T_{xx}}{p-1}$, $\frac{E_{xx}}{N-p}$ என்பன σ_x^2-ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடுகளாம்.

இதே மாதிரி, y முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு σ_y^2-ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடுகளைக் காணலாம்.

y மாறியின்,

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= S_{yy} = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y})^2$

பிரிவுகளிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= T_{yy} = \sum_i n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2$

பிரிவுகளகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= E_{yy} = \sum_j \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$

S_{yy}, T_{yy}, E_{yy} ஆகியவற்றிற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் முறையே, $(N-1)$, $(p-1)$, $(N-p)$.

கணக்கிடுவதற்கு எளிதாக இருக்கும் பொருட்டு, பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகைகளையும், வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளையும் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$S_{xy} = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})(y_{ij} - \bar{y})$$

$$= \sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij} - \sum_i \sum_j x_{ij} \bar{y} + \sum_i \sum_j \bar{x} \bar{y} + \sum_i \sum_j y_{ij} \bar{x}$$

$$= \sum_i \sum_i x_{ij} y_{ij} - N \bar{x} \bar{y} + N \bar{x} \bar{y} + N \bar{x} \bar{y}$$

$$\sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij} - \frac{T_x T_y}{N}.$$

$$T_{xy} = \sum_i n_i (\bar{x}_i - \bar{x})(\bar{y}_i - \bar{y})$$

$$= \sum_i n_i (\bar{x}_i \bar{y}_i - \bar{x} \bar{y}_i - \bar{x}_i \bar{y} + \bar{x} \bar{y})$$

$$= \sum_i n_i \bar{x}_i \bar{z}_i - \bar{x} \sum_i n_i y_i - \bar{y} \sum_i n_i \bar{x}_i + \bar{x} \bar{y} \sum_i n_i$$

$$= \sum_i \frac{T_{ki\cdot}\, T_{xi\cdot}}{n_i} - N \bar{x} \bar{y}$$

$$= \sum_i \frac{T_{xi\cdot}\, T_{yi\cdot}}{n_i} - \frac{T_{x\cdot}\, T_y}{N}$$

$$E_{xy} = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i)$$

$$= \sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij} - \sum_i \sum_j \bar{x}_i y_{ij} - \sum_i \sum_j x_{ij} \bar{y}_i + \sum_i \sum_j \bar{x}_i \bar{y}_i$$

$$= \sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij} - \sum \frac{T_{xt\cdot}\, T_{yi}}{n_i}$$

$E_{xy} = S_{xy} - T_{xy}$ எனக் கணக்கிடலாம்.

$$S_{xx} = \sum_i \sum_j x_i{}^2{}_j - \frac{T_x{}^2}{N}$$

$$T_{xx} = \sum_{i=1}^{p} \frac{T_x{}^2{}_{i\cdot}}{ni} = \frac{T_x{}^2}{N}$$

$$E_{xx} = \sum_{i=j} \sum x_i{}^2{}_j - \sum_i \frac{T_x{}^2{}_{i\cdot}}{n_i}$$

$$S_{yy} = \sum_i \sum_j y_i{}^2{}_j - \frac{T_y{}^2}{N}$$

$$T_{yy} = \sum_i \frac{T_y{}^2{}_{i\cdot}}{n_i} - \frac{T_y{}^2}{N}$$

$$E_{yy} = \sum_i \sum_j y_i{}^2{}_j - \sum \frac{T_y{}^2{}_i}{n_i}$$

இது காறும். பார்த்த பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகைகளையும்; வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளையும் அட்டவணைப் படுத்தலாம்;

அட்டவணை 4.1.2.

உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு அட்டவணை—ஒருவழிப் பிரிவு

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை		பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை	மாறுபாட்டுக் கெழுவின் மதிப்பீடு
		x	y		
பிரிவுகளிடையே	$p-1$	$\sum_{i=1}^{p} \frac{T^2_{xi\cdot}}{ni} - \frac{T^2_x}{N} = T_{xx}$	$\sum_i \frac{T^2_{yi\cdot}}{ni} - \frac{T^2_y}{N} = T_{yy}$	$\sum_i \frac{T_{xi\cdot} T_{yi\cdot}}{ni} - \frac{T_x \cdot T_y}{N} = T_{xy}$	
பிரிவுகளகத்தே	$N-p$	$\sum_i \sum_j x^2_{ij} - \sum_i \frac{T^2_{xi\cdot}}{ni} = E_{xx}$	$\sum_i \sum_j y^2_{ij} - \sum_i \frac{T_{yi}}{ni} = E_{yy}$	$\sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij} - \sum_i \frac{T_{xi\cdot} T_{yi}}{ni} = E_{xy}$	$b = \frac{E_{xy}}{E_{xx}}$
மொத்தம்	$N-1$	$\sum_i \sum_j x^2_{ij} - \frac{T^2_x}{N} = S_{xx}$	$\sum_i \sum_j y^2_{ij} - \frac{T^2_y}{N} = S_{yy}$	$\sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij} - \frac{T_x T_y}{N} = S_{xy}$	

மாறிகளின் பிரிவுகளகத்தே பகுதியிலிருந்து தொடர்புக் கெழுவின் மதிப்பீட்டைப் பெறலாம்.

$$\text{மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு } b = \frac{\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{y}_i) y_{ij} - \bar{y}_i)}{\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}$$

$$= \frac{E_{xy}}{E_{xx}}$$

கணக்கிடப்பட்ட b-ன் மதிப்பு முழுமைத் தொகுதியில் மாறிகளின் தொடர்பைத் தெரிவிக்கின்றதா என சோதனையிடலாம். b-ன் மதிப்பு பொருளுடையதாக இருப்பின், மாறிகளின் தொடர்பிற்காகப் பிரிவுகளின் கூட்டிடைகளைச் சரி செய்த பின்பு, அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடுகளுக்காகச் சோதனையிடலாம்.

தொடர்புக் கோட்டிலிருந்து y-ன் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை,

$$\sum_i (y_i - Y_i)^2 = \sum_j (y_i - \bar{y})^2 - \frac{\left\{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right\}^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

எனக் கண்டோம்.

இச் சமன்பாட்டைப் பிரிவுகளத்தே பகுதிக்குப் பயன்படுத்தினால்,

$$\left.\begin{array}{c}\text{தொடர்புக் கோட்டிலிருந்து } y\text{-ன் விலக்கங்களின்} \\ \text{வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை}\end{array}\right\} = E_{yy} - \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}}$$

$$\text{பிரிவுகளத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை} = E_{yy}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{மாறிகளின் தொடர்பின் காரணமாக வர்க்கங்களின்} \\ \text{கூட்டுத் தொகை (Sum of squares due to regression)}\end{array}\right\} = \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}}$$

தொடர்புக் கெழு b ஐச் சோதனையிட பின்வரும் அட்டவணை பயன்படுகின்றது.

அட்டவணை 4.1.3

தொடர்புக் கெழுச் சோதனை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை சராசரி
மாறிகளின் தொடர்பு	1	$E^2_{xy}/E_{xx} = S_1$	$E^2_{xy}/E_{xx} = S_1^+$
தொடர்புக் கோட்டிலிருந்து விலக்கம்	$N-p-1$	$E_{yy} - \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}} = S_2$	$\left(E_{yy} - \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}}\right) \Big/ N-p-1 = S_2^+$
மொத்தம்	$N-p$	E_{yy}	

$\frac{S_1^+}{S_2^+}$ என்ற விகிதம் 1, $(N-p-1)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட F ஆகப் பரவியுள்ளது. எனவே,

$\frac{S_1^+}{S_2^+} = F \geq F_{\alpha, 1, (N-p-1)}$ ஆக இருப்பின் 'b' பொருளுடையதாக உள்ளது என்கிறோம்.

இனி மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரிசெய்த பின்பு பிரிவுகளின் கூட்டிடைகளைச் சோதனையிடும் முறையைக் காணலாம். வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையிலிருந்து மாறிகளின் தொடர்பின் காரணமான வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் கழித்து, சரிசெய்யப்பட்ட வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைப் பெறலாம்.

மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட y-ன் மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\Big\} = S^a_{yy}$

$$S^a_{yy} = S_{yy} - \frac{S^2_{xy}}{S_{xx}} \ldots (1)$$

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $= N-1-1$

$= N-2$

சரிசெய்யப்பட்ட பிளவுகளகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\Big\} = E^a_{yy}$

$$E^a_{yy} = E_{yy} - \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}} \ldots (2)$$

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $= N-p-1$

சரிசெய்யப்பட்ட y-ன் பிரிவுகளிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\Big\} = T^a_{yy}$

$$T^a_{yy} = S^a_{yy} - E^a_{yy}$$

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $= (N-2)-(N-p-1)$

$= (p-1)$

இம் முடிவுகளை உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு அட்டவணையில் குறிக்கலாம்:

அட்டவணை 4. 1. 4

உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை x	y	பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை	வரையற்ற பாகைகள்	சரிசெய்யப்பட்ட வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
பிரிவுகளிடையே	$p-1$	T_{xx}	T_{yy}	T_{xy}	$p-1$	$T^a_{yy} = S^a_{yy} - E^a_{yy}$
பிரிவுகளகத்தே	$N-p$	E_{xx}	E_{yy}	E_{xy}	$N-p-1$	$E^a_{yy} = E_{yy} \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}}$
மொத்தம்	$N-1$	S_{xx}	S_{yy}	S_{xy}	$N-2$	$S^a_{yy} = S_{yy} - \frac{S^2_{xy}}{S_{xx}}$

மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரிசெய்யப்பட்ட பின்பு பிரிவுகளின் கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோளைச் சோதனையிட,

$\frac{T^{a}_{yy}/(p-1)}{E^{a}_{yy}/(N-p-1}$ என்ற விகிதத்தின் மதிப்பு கணக்கிடப்படு கின்றது.

எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும்பொழுது, இவ்விகிதம் $(p-1)$, $(N-p-1)$ வரையற்ற பாகைகளுடன் F ஆகப் பரவியுள்ளது. எனவே,

$\frac{T^{a}_{yy}/(p-1)}{E^{a}_{yy}/(N-p-1)} = F \geq F_{\alpha, (P-1), (N-P-1)}$ ஆக இருந்தால், மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரிசெய்யப்பட்ட பின்பு பிரிவுகளின் கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோள் தள்ளப்படுகின்றது.

உடன் மாறுபட்டு ஆய்வில் மேற்கொள்ளும் தற்கோள்களும் சோதிக்கப்படும் எடுகோளும்

உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வில் p முழுமைத் தொகுதிகளில் தொடர்புக் கோடுகள் இணை நேர்கோடுகளாக (Paralle) straight lines) உள்ளன எனக் கொள்கிறோம். இணைநேர்கோடு களாக உள்ள தொடர்புக் கோடுகள் இணைகின்றன (coincide) என்பது எடுகோளாகும். அதாவது எல்லா முழுமைத் தொகுதி களிலும் ஒரே x மதிப்பு இருக்கும்பொழுது, எல்லா முழுமைத் தொகுதிகளிலும் y-ன் கூட்டிடைகள் சமமாக உள்ளன என்பதாகும் இதையே, x மதிப்புகளுக்குச் சரிசெய்த பிறகு y-ன் கூட்டிடைகள் சமமாக உள்ளன என்று கூறலாம். எல்லா முழுமைத் தொகுதிகளிலும் (p முழுமைத் தொகுதிகள்) தொடர்புக் கோடுகளைச் சுற்றி y மதிப்புகள் ஒரே மாறுபாட்டுடன் பரவியுள்ளன எனக் கொள்ளுகிறோம். மேலும், ஒவ்வொரு முழுமைத் தொகுதியிலும், ஒவ் வொரு x மதிப்பிற்கும் y மதிப்புகள் இயல் நிலையில் பரவியுள்ளன எனக் கொள்கிறோம்.

கீழே x, y மாறிகளின் விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. x உடன் y-ன் தொடர்பிற்காகச் சரிசெய்த பின்பு y மாறியின் பிரிவு களிடையேயுள்ள வேறுபாடுகளைச் சோதனை செய்யலாம்.

அட்டவணை 4.1.5 பிரிவுகள்

	1		2		3		4		5	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
	49	73	47	67	55	82	52	77	50	77
	47	70	56	78	46	73	50	75	49	75
	52	75	48	70	55	80	48	75	49	76
	46	69	48	71	51	76	52	81	50	78
	56	79	46	70	51	75	50	77	48	76
	50	72	51	73	50	76	44	73	57	83
மொத்தம்	300	438	296	429	308	462	296	458	303	465

கணக்கீடுகள்.

x **மாறி:** *x* மாறியின் ஒவ்வொரு மதிப்பிலிருந்தும் 50ஐக் கழித்துக் கணக்கீடுகள் செய்வது எளிது.

(1) சரியீட்டளவு $= \frac{Tx^2}{N} = \frac{3^2}{30} = 0.30$

(2) $\sum_i \sum_j x_{ij}^2 = (-1)^2 + (-3)^2 + \ldots + (-2) + (7)^2$

$$= 307$$

(3) $\frac{1}{n} \sum_i T_{xi.}^2 = \frac{0 + (-4)^2 + (8)^2 + (-4)^2 + (3)^2}{6}$

$$= \frac{105}{6} = 17.50$$

(4) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S_{xx} = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$$

$= (2) - (1)$

$= 306.70$

(5) பிரிவுகளிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\} = T_{xk}$

$$= \frac{1}{n} \Sigma\, T_{xi}^2 - \frac{T_x^2}{N}$$

$= (3) - (1)$

$= 17.20$

(6) பிரிவுகளகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\} = E_{xx}$

$= S_{xx} - T_{xx}$

$= (4) - (5)$

$= 289.50$

y மாறி : y மாறியின் ஒவ்வொரு மதிப்பிலிருந்தும் 75ஐக் கழித்துக் கணக்கீடுகள் செய்வது எளிது.

(1) சரியீட்டளவு: $\frac{T_y^2}{N} = \frac{2^2}{30} = 0.13$

(2) $\sum_i \sum_j y_{ij}^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + \ldots + (3)^2 + (1)^2$

$= 440.$

(3) $\frac{1}{n} \Sigma\, T_{yi}^2 = \frac{(-12)^2 + (-21)^2 + (12)^2 + (8)^2 + (15)^2}{6}$

$$= \frac{1018}{6} = 169.67$$

(4) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை S_{yy}

$$= \Sigma\ \Sigma\ y_{ij}^2 - \frac{T_j^2}{N}$$

$$= (2) - (1)$$

$$= 439.87$$

(5) பிரிவுகளிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= T_{yy}$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma T_{yi}^2. - \frac{T_y^2}{N}$$

$$= (3) - (1)$$

$$= 169.54$$

(6) பிரிவுகளகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= E_{yy}$$

$$= S_{xy} - T_{yy}$$

$$= (4) - (5)$$

$$= 270.33.$$

XY

(1) சரியீட்டளவு $= \dfrac{T_x\ T_y}{N} = \dfrac{3 \times 2}{30} = 0.20$

(2) $\sum_j \sum_j x_{ij}\, y_{ij} = (-1) \times (-2) + (-3) \times (-5) + \ldots$
$= (-2) \times (1) + (7) \times (8)$

$$= 293$$

(3) $\dfrac{1}{n} \sum_i T_{xi} \cdot T_{yi}$

$$= \frac{(0 \times -12) + (-4) \times (-21) + (8 \times 12) + (-4 \times 8) + (3 \times 15)}{6}$$

$$= \frac{193}{6} = 32.17$$

(4) மொத்த பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை $\Big\} = S_{xy}$

$$= \sum_{j}\sum_{i} x_{ij}\, y_{ij}. - \frac{T_x\; T_y}{N}$$

$$= (2) - (1)$$

$$= 292.80$$

(5) பிரிவுகளிடையே பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை $\Big\} = T_{xy}$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i} T_{xi}\; T_{yi}. - \frac{T_x\; T_y}{N}$$

$$= (3) - (1)$$

$$= 31.97$$

(6) பிரிவுகளகத்தே பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை $\Big\} = E_{xy}$

$$= S_{xy} - T_{xy}$$

$$= (4) - (5)$$

$$= 260.83$$

இனி, மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுவின் மதிப்பீட்டைக் கணக்கிட்டு, அம்மதிப்பீடு பொருளுடைய வகையில் உள்ளதா எனச் சோதனையிடலாம்.

மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுவின் மதிப்பீடு $= b = \dfrac{E_{xy}}{E_{xx}}$

$$= \frac{260.83}{289.50}$$

$$= 0.90$$

b பொருளுடையதாக இருக்கின்றதா எனச் சோதனை செய்ய,

$$F = \frac{E^2_{xy}/E_{xx}}{\left(E_{yy} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}}\right)/N-p-1}$$

$$= \frac{(260.83)^2/289.50}{\left(270.33 - \frac{(260.83)^2}{289.50}\right) / 30-5-1}$$

$$= 159.6 > F_{1, 24}$$

b மிகவும் பொருளுடையதாக இருக்கின்றது.

இனி மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்த பின்பு பிரிவுகளின் கூட்டிடைகளிடையேயுள்ள வேறுபாடுகளைச் சோதனை செய்யலாம்.

மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட y–ன் மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= S^a_{yy}$

$$S^a_{yy} = S_{yy} - \frac{S^2_{xy}}{S_{xx}}$$

$$= 439.87 - \frac{(292.80)^2}{306.70}$$

$$= 439.87 - 279.60$$

$$= 160.27$$

மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட y–ன் பிரிவுகளகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= E^a_{yy}$

$$E^a_{yy} = E_{yy} - \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}}$$

$$= 270{\cdot}33 - \frac{(260{\cdot}83)^2}{289{\cdot}50}$$

$$= 35{\cdot}33$$

மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட y-ன் பிரிவுகளிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\Big\} = T^a_{yy}$

$$T^a_{yy} = S^a_{yy} - E^a_{yy}$$

$$= 160{\cdot}27 - 35{\cdot}33$$

$$= 124{\cdot}94$$

அட்டவணை 4. 1. 6

மாறுபாட்டு ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை X	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை Y	பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை	வரையற்ற பாகைகள்	சரிசெய்யப்பட்ட வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
பிரிவுகளிடையே	4	17·20	169.54	31.97	4	T^a_{yy} = 160·27− 35.33 =124·94
பிரிவுகளத்தே	25	289·50	270·33	260·83	24	E^a_{yy} = 35·33
மொத்தம்	29	306.70	439.87	292.80	28	S^a_{yy} = 160.27

மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரிசெய்யப்பட்ட பின்பு பிரிவுகளின் கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோளைச் சோதனையிட,

$$F = \frac{T^a_{yy} / p-1}{E^a_{yy} / N-p-1} = \frac{124.94/4}{35.33/24} = 21.20$$

$$F = 21.20. > F_{.01,\,4,\,24} = 4.22$$

எனவே, 1 சதவீத மட்டத்தில் எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுகின்றது.

உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு 2: இரு வழிப்பாகுபாடு:

விவரங்கள் இரு பண்புகளின் அடிப்படையில் பிரிக்கப்பட்டுள்ளபொழுது உடன்மாறுபாட்டு ஆய்வு நடத்தப்படும் முறையைக் காணலாம். முதல் பண்பில் p பிரிவுகளும் இரண்டாவது பண்பில் n பிரிவுகளும் உள்ளன எனவும், மொத்தம் $np-N$ x, y இணை மதிப்புகள் உள்ளன எனவும் கொள்வோம். முதல் பண்பின் பிரிவுகள் நிரல்களாகவும், இரண்டாவது பண்பின் பிரிவுகள் வரிசைகளாகவும் கீழேஉள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 4. 2. 1.

முதல் பண்பு (நிரல்கள்)

இரண்டாவது பண்பு (வரிசைகள்)	1 2 ... i ... p	மொத்தம்	கூட்டிடை
1	$x_{11}\ y_{11}\ x_{21}\ y_{21} \ldots x_{i1}\ y_{i1} \ldots x_{p1}\ y_{p1}$	$T^{x}._{1}\ T_{y\cdot 1}$	$\bar{x}_{\cdot 1}\ \bar{y}_{\cdot 1}$
2	$x_{12}\ y_{12}\ x_{22}\ y_{22} \ldots x_{i2}\ y_{i2} \ldots x_{p2}\ y_{p2}$	$T_{x\cdot 2}\ T_{y\cdot 2}$	$\bar{x}_{\cdot 2}\ \bar{y}_{\cdot 2}$
⋮	⋮ ⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮
j	$x_{1j}\ y_{1j}\ x_{2j}\ y_{2j} \ldots x_{ij}\ y_{ij} \ldots x_{pj}\ y_{pj}$	$T_{x\cdot j}\ T_{y\cdot j}$	$\bar{x}_{\cdot j}\ \bar{y}_{\cdot j}$
	⋮ ⋮ ⋮ ⋮	...	⋮
n	$x_{1n}\ y_{1n}\ x_{2n}\ y_{2n} \ldots x_{in}\ y_{in} \ldots x_{pn}\ y_{pn}$	$T_{x\cdot n}\ T_{yn}$	$\bar{x}_{\cdot n}\ \bar{y}_{\cdot n}$
மொத்தம்	$T_{x1}\ T_{y1}\ T_{x2}\ T_{y2} \ldots T_{xi}\ T_{yi} \ldots T_{xp}\ T_{yp}$	$T_x\ T_y$	
கூட்டிடை	$\bar{x}_1\ \bar{y}_1\ \bar{x}_2\ \bar{y}_2 \ldots \bar{x}_i\ \bar{y}_i \ldots \bar{x}_p\ \bar{y}_p$		$\bar{x}\ \bar{y}$

இவ்வட்டவணையில்,

x_{ij}, y_{ij} = i ஆவது நிரலில் j ஆவது வரிசையில் உள்ள x, y இணை மதிப்புகள்.

$i=1, 2, \ldots p \qquad j=1, 2, \ldots n.$

$$T_{xi}=\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \qquad T_{yj}=\sum_{j=1}^{n} y_{ij}$$

$$T_{x\cdot j}=\sum_{i=1}^{p} x_{ij} \qquad T_{y\cdot j}=\sum_{i=1}^{p} y_{ij}$$

$$Tx=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad Ty=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}=\sum_{i=1}^{p} T_{yi\cdot}$$

$$=\sum_{i=1}^{p} T_{xi\cdot}=\sum_{j=1}^{n} T_{xi} \qquad =\sum_{j=1}^{n} T_{y\cdot j}$$

$$\bar{x}_{i\cdot}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \qquad \bar{y}_{i\cdot}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}$$

$$=\frac{T_{xi}}{n} \qquad =\frac{T_{yi}}{n}$$

$$\bar{x}_{\cdot j}=\frac{T_{x\cdot j}}{p} \qquad \bar{y}_{\cdot j}=\frac{T_{y\cdot j}}{p}$$

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \qquad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1} y_{ij}$$

$$=\frac{T_x}{N} \qquad =\frac{T_y}{N}$$

பொதுக்கூட்டிடை $\bar{x}$–லிருந்து x_{ij} ன் விலக்கத்தையும், y–லிருந்து y_{ij}–ன் விலக்கத்தையும் பெருக்கி i, j-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ($i=1, 2 \ldots p$; $j=1, 2, \ldots n$) கூட்டுத்தொகையைக் காண வேண்டும். இது மொத்தப் பெருக்குததொகைகளின் கூட்டுத் தொகை ஆகும்.

$$\left.\begin{array}{l}\text{மொத்தப் பெருக்குத் தொகைகளின்}\\ \text{கூட்டுத்தொகை}\end{array}\right\}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}(x_{ij}-\bar{x})(y_{ij}=\bar{y})$$

இதை மூன்று பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம்.

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x})(y_{ij}-\bar{y})=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\left\{(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_{.j}+\bar{x})+(\bar{x}_i-\bar{x})+(\bar{x}_j-\bar{x})\right\}$$

$$\times\left\{(y_{ij}-\bar{y}_i-\bar{y}_j+\bar{y})+(\bar{y}_i-\bar{y})+(\bar{y}_{.j}-\bar{y})\right\}$$

$$=\sum_{j}\sum_{i}(\bar{x}_i-\bar{x}_i)(\bar{y}_i-\bar{y})+\sum_{i}\sum_{j}(\bar{x}_{.j}-\bar{x})(\bar{y}_j-\bar{y})$$

$$+\sum_{i}\sum_{j}(x_{ij}-\bar{x}-\bar{x}_{.j}+\bar{x})(y_{ij}-\bar{y}_i-\bar{y}_{.j}+\bar{y})$$

+ பூச்சியம் மதிப்புடைய உறுப்புகள்.

எனவே,

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i}^{n}(x_{ij}-\bar{x})(y_{ij}-\bar{y})=n\sum_{i}(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{y}_i-\bar{y})+p\sum_{i}(\bar{x}_j-\bar{x})(\bar{y}_j-\bar{y})$$

$$+\sum_{i}\sum_{j}(x_{ij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{,ij}+x)(y_{ij}-\bar{y}_i-\bar{y}_{.j}+\bar{y})$$

இச் சமன்பாட்டில்

$n\sum_{i}(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{y}_i-\bar{y})$ = நிரல்கள் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை.

$p\sum_{j}(\bar{x}_{.j}-\bar{y})(\bar{y}_{.j}-\bar{y})$ = வரிசைகள் பெருக்குத்தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை.

$\sum_{i}\sum_{j}(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_{.j}+\bar{x})(y_{ij}-\bar{y}_i-\bar{y}_{.j}+\bar{y})$ = பிழை பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை.

இனிமேல்,

$$\sum_{i}\sum_{j}(x_{ij}-\bar{x})(y_{ij}-\bar{y}) = S_{xy}$$

$$n\sum_{i}(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{y}_i-\bar{y}) = T_{xy}$$

$$p\sum_{j}{}_1(\bar{x}_{ij}-\bar{x})(\bar{y}_j-\bar{y}) = R_{xy}$$

$\sum\sum_{j}(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{x})(y_{ij}-\bar{y}_i-\bar{y}_j+\bar{y})=E_{xy}$ என குறிக்கலாம்.

எனவே,

$$S_{xy} = T_{xy} + R_{xy} + E_{xy}$$

மொத்தப் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகைக்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $(N-1)$.

நிரல்கள் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை, வரிசைகள் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை, பிழை பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை ஆகியவற்றிக்கான வரையற்ற பாகைகள் முறையே $(p-1)$, $(n-1)$, $(p-1)(n-1)$.

x, y மாறிகளின் N இணைமதிப்புகள் ஒரு படித்தான முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரி என்ற தற்கோளின் கீழ்,

$$E(S_{xy}) = (N-1)\mu_{11}$$

இதில் μ_{11} முழுமைத் தொகுதியின் உடன்மாறுபாடு.

p நிரல்களில் உள்ள x, y மாறிகளின் மதிப்புகள் ஒரு படித்தான முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரிகள் என்ற தற்கோளின் கீழ்,

$$E(T_{xy}) = (p-1)\mu_{11}$$

n வரிசைகளில் உள்ள இணைமதிப்புகள் ஒரு படித்தான முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ராண்டம் மாதிரிகள் என்ற தற்கோளின் கீழ்,

$$E(R_{xy}) = (n-1)\mu_{11}$$

$$E(S_{xy}) = E(T_{xy}) + E(R_{xy}) + E(E_{xy})$$

எனவே,

$$E(Exy) = (n-1)(p-1)\mu_{11}$$

ஆகவே,

$\frac{S_{xy}}{N-1}$, $\frac{T_{xy}}{p-1}$, $\frac{R_{xy}}{n-1}$, $\frac{E_{xy}}{(p-1)(n-1)}$ என்பவ ஒருபடித்தான முழுமைத் தொகுதியின் உடன்மாறுபாட்டின் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடுகள் (unbiassed estimates) ஆகும்.

இனி முழுமைத் தொகுதியில் x மாறியின் மாறுபாடு σx^2-ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடுகளைக் காணலாம். பரவற்படி ஆய்வு இரு வழிப் பிரிவில் உள்ளதைப்போல,

$$\sum_i \sum_j (x_{ig}-\bar{x})^2 = n\sum_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2 + p\sum_i (\bar{x}_{ij}-\bar{x})^2 + \sum_i\sum_i(\bar{x}_{ij}-\bar{x}_j-\bar{x}_j+\bar{x})^2$$

இச் சமன்பாட்டில்,

$\sum_i \sum_j (\bar{x}_{ij}-\bar{x})^2$ = மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $=S_{xx}$

$n\sum_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2$ = நிரல்கள் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $=T_{xx}$

$p\sum_j(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})^2$ = வரிசைகள் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $=R_{xx}$

$\sum_i \sum_j(\bar{x}_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})^2$ = பிழைவர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= E_{xx}$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை, நிரல்கள் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை, வரிசைகள் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை, பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை ஆகியவற் றிக்கு வரையற்ற பாகைகள் முறையே $(N-1)$, $(p-1)$, $(n-1)$, $(p-1)$, $(n-1)$.

இணைமதிப்புகள் ஒரு படித்தான முழுமைத் தொகுதியிலி ருந்து எடுக்கப்பட ராண்டம் மாதிரிகள் என்ற தற்கோளின் கீழ்,

$\frac{S_{xx}}{N-1}$, $\frac{T_{xx}}{p-1}$, $\frac{R_{xx}}{n-1}$, $\frac{E_{xx}}{(p-1)(n-1)}$ என்பன முழுமைத் தொகுதியின் x மாறியின் மாறுபாடு σx^2-ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப் பீடுகள் ஆகும்.

இதே போல முழுமைத் தொகுதியில் y மாறியின் மாடுபாடு $\sigma^2{}_y$-ன் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடுகளைப் பெறலாம்.

y மாறிக்கான

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$S_{yy} = \sum_i \sum_j (y_{ij}-\bar{y})^2$$

நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$T_{yy} = \sum_i n(\bar{y}_i-\bar{y})^2$$

வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$R_{yy}=\sum_{i} p\,(\bar{y}_j-\bar{y})^2$$

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$E_{yy}=\sum_{i}\sum_{j}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot i}+\bar{y})^2$$

இவற்றிற்குரிய வரையற்றபாகைகள் முறையே, $(N-1)$, $(p-1)$, $(n-1)$ $(u-1)$ $(p-1)$ என்பன.

கணக்கிடுவதற்கு எளிதாக இருக்க, பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகைகளையும், வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளையும் பின் வருமாறு எழுதலாம் :

மொத்தப் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை.

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{p},\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x})(y_{ij}-\bar{y})$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}\,y_{ij}-\bar{x}y_{ij}-\bar{y}x_{ij}+\bar{x}\,\bar{y})$$

$$=\sum_{i}\sum_{j}x_{ij}\,y_{ij}-N\,\bar{x}\,\bar{y}$$

$$=\sum_{i}\sum_{j}x_{ij}y_{ij}-\frac{T_x\,T_y}{N}$$

நிரல் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை

$$T_{xy}=n\sum_{i}(\bar{x}_i-\bar{x})\,(\bar{y}_i-\bar{y})$$

$$=n\sum_{i}(\bar{x}_{i\cdot}\,\bar{y}_{i\cdot}-\bar{x}\,\bar{y}_{\cdot}-\bar{y}\,\bar{x}_i+\bar{x}\,\bar{y})$$

$$=n\sum_{i}\bar{x}_{i\cdot}\,\bar{y}_{i\cdot}-N\,\bar{x}\,\bar{y}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i}T_{xi\cdot}\quad T_{yi\cdot}-\frac{T_x\,T_y}{N}$$

வரிசை பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை

$$R_{xy}=p\sum_{j}(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y})$$

$$=p\sum_{j}(\bar{x}_{\cdot j}\,\bar{y}_{\cdot j}-\bar{x}\,\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y}\,\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x}\,\bar{y})$$

$$= p \sum_j \bar{x}_{\cdot j} \bar{y}_{\cdot j} - p \bar{x} \sum_j \bar{y}_{\cdot j} - p \bar{y} \sum_j \bar{x}_{\cdot j} + p \sum_j \bar{x} \bar{y}$$

$$= \frac{1}{p} \sum_j T_{x \cdot j} T_{y \cdot j} - \frac{T_x T_y}{N}$$

பிழை பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை

$$E_{xy} = \sum_i \sum_j (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})(y_{ij} - \bar{y}_i - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y})$$

$$= \sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij} - \bar{x}_{\cdot j} y_{ij} \bar{x}_i y_{ij} + \bar{x} y_{ij}$$

$$- x_{ij} \bar{y}_{i\cdot} + \bar{x}_{i\cdot} \bar{y}_{i\cdot} + \bar{x}_{\cdot j} \bar{y}_i - \bar{x} \bar{y}_{i\cdot}$$

$$- x_{ij} \bar{y}_{\cdot j} + x_{i\cdot} \bar{y}_{\cdot j} + \bar{x}_{\cdot j} \bar{y}_j - \bar{x} \bar{y}_{\cdot j}$$

$$+ x_{ij} \bar{y} - x_{i\cdot} \bar{y} - \bar{x}_{\cdot j} \bar{y} + \bar{x} \bar{y})$$

$$= \sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij} - n \sum_i \bar{x}^{j}. \bar{y}_{i\cdot} - p \sum_j \bar{x}_{\cdot j} \bar{y}_{\cdot j} + N \bar{x} \bar{y}$$

$$= \sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij} - \frac{1}{n} \sum_i Tx_{i\cdot} Ty_{i\cdot} - \frac{1}{p} \sum_j T_{x \cdot j} Ty_{\cdot j} + \frac{T_x Ty}{N}$$

$E_{xy} = S_{xy} - (T_{xy} + R_{xy})$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து பிழை பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகையை எளிதில் பெறலாம்.

பரவற்படி ஆய்வில் உள்ளதைப் போன்று,

$$S_{xx} = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{T_x^2}{N}$$

$$T_{xx} = \frac{1}{n} \sum_i T_{xi}^2 - \frac{T_x^2}{N}$$

$$R_{xx} = \frac{1}{p} \sum_j T_{x \cdot j}^2 - \frac{T_x^2}{N}$$

$$E_{xx} = S_{xx} - (T_{xx} + R_{xx})$$

$$S_{yy} = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{Ty^2}{N}$$

$$T_{yy} = \frac{1}{n} \sum_i T_{y i\cdot}^2 - \frac{T_y^2}{N}$$

$$R_{yy} = \frac{1}{p} \sum_j T_{y j}^2 - \frac{T_{yy}}{N}$$

$$E_{yy} = S_{yy} - (T_{yy} + R_{yy})$$

மேற்கூறியவற்றை அட்டவணைப் படுத்தி எழுதலாம்,

அட்டவணை 4.2.2

உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு — இருவழிப்பிரிவு

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை		பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை	தொடர்புக் குழுவின் மதிப்பீடு
		x	y		
நிரல் களிடையே	$p-1$	$T_{xx}=\frac{1}{n}\sum_i T^2_{xi}-\frac{T^2_x}{N}$	$T_{yy}=\frac{1}{n}\sum_i T^2_{yi\cdot}-\frac{T^2_y}{N}$	$T_{xy}=\frac{1}{n}\sum_i T_{xi\cdot}T_{yi\cdot}-\frac{T_x T_y}{N}$	
வரிசை களிடையே	$n-1$	$R_{xx}=\frac{1}{p}\sum_j T^2_{xj}-\frac{T^2_x}{N}$	$R_{yy}=\frac{1}{p}\sum_j T^2_{y\cdot j}-\frac{T^2_y}{N}$	$R_{xy}=\frac{1}{p}\sum_j T_{x\cdot j}T_{y\cdot j}-\frac{T_x T_p}{N}$	$b=\frac{E_{xy}}{E_{xx}}$
பிழை	$(p-1)(n-1)$	$S_{xx}-(T_{xx}+R_{xx}) = E_{xx}$	$S_{yy}-(T_{yy}+R_{yy}) = E_{yy}$	$S_{xy}-(T_{xy}+R_{xy}) = E_{xy}$	
மொத்தம்	$N-1$	$S_{xx}=\sum_i\sum_j x^2_{ij}-\frac{T^2_x}{N}$	$S_{yy}=\sum_i\sum_j y^2_{ij}-\frac{T^2_y}{N}$	$S_{xy}=\sum_i\sum_j x_{ij}y_{ij}-\frac{T_x T_y}{N}$	

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையையும், பிழை பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகையையும் கொண்டு x, y மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுவை மதிப்பிடலாம்.

மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு b

$$= \frac{\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y})}{\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2}$$

$$= \frac{E_{xy}}{E_{xx}}$$

அடுத்து, ஒருவழிப் பாகுபாட்டில் செய்ததைப் போலவே, b-ன் மதிப்புப் பொருளுடையதாக உள்ளதா எனச் சோதனை யிடலாம். அதன் பொருட்டு பின்வருவனவற்றைக் கணக்கிடு கிறோம்.

பிழைகளுக்கான மீதி வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (Residual sum of squres due to error)யிலிருந்து பெறப்பட்ட y-ன் மாறுபாட்டின் மதிப்பீடு.
$$= \frac{E_{yy} - \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}}}{N-p-n}$$

மாறிகளின் தொடர்பின் காரணமான வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (Some of squares due to Regression)யிலிருந்து பெறப்பட்ட y-ன் மாறுபாட்டின் மதிப்பீடு
$$= \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}}$$

இவ்விரண்டிற்கும் உள்ள விகிதம்,

$$\frac{E^2_{xy}/E_{xx}}{E_{yy} - \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}}} \times (N-p-n)$$

என்பது 1, $N-p-n$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட F-ஆகப் பரவியுள்ளது.

எனவே,

$$\frac{E^2_{xy}/E_{xx}}{E_{yy} - \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}}} \times (N-p-n) = F > F\alpha,_{1, N-p-n}$$ ஆக இருந்தால், b-ன் மதிப்பு பொருளுடையதாக இருப்பதாகக் கொள்ளு கிறோம். b-ன் மதிப்பு பொருளுடையதாக இருப்பின், மாறி

களின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்டு நிரல்களின் (வரிசைகளின்) கூட்டிடைகள் சோதனை செய்யப்படுகின்றன.

மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட நிரல்களின் கூட்டிடைகளைச் சோதனையிடும் முறையைக் காணலாம். வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையிலிருந்து மாறிகளின் தொடர்பின் காரணமான வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் கழித்து சரி செய்யப்பட்ட வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைப் பெறலாம்.

மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட y-ன் பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\Big\} = E^a_{yy}$

$$E^a_{yy} = E_{yy} - \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}} \quad \ldots (1)$$

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $= (n-1)(p-1) - 1$

நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை + பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\Big\} = T_{yy} + E_{yy}$

சரி செய்யப்பட்ட $(T_{yy} + E_{yy}) = (T_{yy} + E_{yy})^a$

$$(T_{yy} + E_{yy})^a = (T_{yy} + E_{yy}) - \frac{(T_{xy} + E_{xy})^2}{T_{xx} + E_{xx}} \ldots \quad (2)$$

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $=(p-1)+(p-1)(n-1)-1$

$$= n(p-1) - 1$$

மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட y-ன் நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\Big\} = T^a_{yy}$

$$T^a_{yy} = (T_{yy} + E_{yy})^a - E^a_{yy}$$

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகளைக் காண $(T_{yy} + E_{yy})$-க்கு உரிய வரையற்ற பாகைகளிலிருந்து E^a_{yy}-க்கு உரிய வரையற்ற பாகைகளைக் கழிக்க வேண்டும்.

$\therefore$ வரையற்ற பாகைகள் $=\{n(p-1)-1\} - \{(n-1)(p-1)-1\}$

$$= n(p-1) - (n-1)(p-1)$$

$$= p - 1$$

இதுகாறும் பார்த்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளையும் சரி செய்யப்பட்ட வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளையும் உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

அட்டவணை 4.2.3

உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு அட்டவணை — இருவழிப் பிரிவு

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை		பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை	வரையற்ற பாகைகள்	சரி செய்யப்பட்ட வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
நிரல்கள்	$p-1$	T_{xx}	T_{yy}	T_{xy}		
வரிசைகள்	$n-1$	R_{xx}	R_{yy}	R_{xy}		
பிழை	$(n-1)(p-1)$	E_{xx}	E_{yy}	E_{xy}	$(n-1)(p-1)-1$	$E_{yy} - \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}} = E^a_{yy}$
மொத்தம்	$N-1$	S_{xx}	S_{yy}	S_{xy}		
நிரல்கள் + பிழை	$n(p.1)$	$T_{xx}+E_{xx}$	$T_{yy}+E_{yy}$	$T_{xy}+E_{xy}$	$n(p-1)-1$	$(T_{yy}+E_{yy}) - \frac{(T_{xy}+E_{xy})^2}{T_{xx}+E_{xx}} = (T_{yy}+E_{yy})^a$
மாறிகளின் தோடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட நிரல்கள்					$(P-1)$	$(T_{yy}+E_{yy})^a - E^a_{yy} = T^a_{yy}$

மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட நிரல்களின் கூட்டிடைகளின் வேறுபாடுகளைச் சோதனையிட,

$\frac{T^a_{yy}}{p-1}$-ம், $\frac{E_{yy}}{(n-1)\,(p-1)-1}$-ம் ஒப்பிடுகிறோம்.

$$[\,(n-1)\,(p-1)-1 = (N-p-n)\,]$$

$$\frac{T^{a}_{yy} / (p-1)}{E^{a}_{yy} / (N-p-n)}$$, $(p-1)$, $(N-p-n)$ வரையற்ற

பாகைகள் கொண்ட F ஆகப் பரவியுள்ளது. எனவே,

$$\frac{T^{a}_{yy} / (p-1)}{E^{a}_{yy} / (N-p-n)} = F \geq F_{\alpha}, \quad {}_{(p-1), \; (N-p-n)}$$ ஆக

இருந்தால் மாறிகள் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட நிரல்களின் கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோள் தள்ளப்படுகின்றது.

இதேபோல, மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட வரிசைகளின் கூட்டிடைகளின் வேறுபாடுகளைச் சோதனையிடலாம்.

வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை + பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\Big\} = (R_{yy}+E_{yy})$

வரையற்ற பாகைகள் $= P(n-1)$

சரி செய்யப்பட்ட $(R_{yy}+E_{yy}) = (R_{yy}+E_{yy})^{a}$

$$(R_{yy}+E_{yy})^{a} = (R_{yy}+E_{yy}) - \frac{(R_{xy}+E_{xy})^{2}}{R_{xx}+E_{xx}}$$

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $= P(n-1)-1$.

சரிசெய்யப்பட்ட வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $\Big\} = R^{a}_{yy}$

$$R^{a}_{yy} = (R_{yy}+E_{yy})^{a} - E^{a}_{yy}$$

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $= \{p(n-1)-1\}$

$$- \{(n-1)(p-1)-1\} = (n-1).$$

$$\frac{R^{a}_{yy} / (n-1)}{E^{a}_{yy} / (N-p-n)} , \quad (n-1), \quad (N-p-n) \text{ வரையற்ற}$$

பாகைகள் கொண்ட F ஆகப் பரவியுள்ளது. எனவே,

$$\frac{R^{a}_{yy} / (n-1)}{E^{a}_{yy} / (N-p-n)} \quad F \geq F\alpha, \; _{(n-1), \; (N-p-n)} \text{ ஆக}$$

இருந்தால் மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரிசெய்யப்பட்ட வரிசைகளின் கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோள் தள்ளப்படுகின்றது.

இரு வழிப்பாகுபாடு உடன் மாறுபாட்டு ஆய்விற்கான தற்கோள்களும் எடுகோள்களும், ஒருவழிப்பாகுபாடு உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வில் உள்ளவை போன்றவையே இது காறும் பார்த்த உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு முறையைக கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்குப் பயன்படுத்தலாம்.

அட்டவணை 4.2.4

	நிரல்கள்										மொத்தம்	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
வரிசைகள்	35	8.3	49	9.4	36	7.7	51	13.4	56	16.7	227	55.5
	27	7.2	45	9.5	39	6.4	50	12.1	53	16.3	214	51.5
	33	6.4	50	9.6	43	7.6	37	9.5	43	11.4	197	44.5
	26	6.3	41	8.9	47	9.2	44	10.0	55	13.8	213	48.2
	24	5.1	40	7.6	47	10.3	51	11.6	46	12.0	208	46.6
	25	6.1	37	6.0	49	9.9	42	9.9	43	11.8	196	43.7
மொத்தம்	170	39.4	262	51.0	252	51.1	275	66.5	296	82.0	1255	290.0

கணக்கீடுகள் :

x மாறி:

(1) மொத்தக்கூட்டுத் தொகை $= T_x = 1255$

(2) சரியீட்டளவு $= \frac{T_x{}^2}{N} = \frac{1255^2}{30} = \frac{1575025}{30}$

$= 52500.83$

(3) $\sum_i \sum_j x_{ij}^2 = 44^2 + 36^2 + \ldots\ldots\ldots + 41^2 + 38^2$

$= 53479$

(4) $\frac{1}{n} \sum_i T_{xi}^2 = \frac{224^2 + 250^2 + 252^2 + 263^2 + 266^2}{6}$

$= \frac{316105}{6}$

$= 52684.17$

(5) $\frac{1}{p} \sum_j T_{xj}^2 \quad \frac{227^2 + 214^2 + 197^2 + 213^2 + 210^2 + 194^2}{5}$

$= \frac{263239}{5}$

$= 52647.80$

(6) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$= S_{xx} = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{Tx^2}{N}$

$= (3) - (2)$

$= 978.17$

(7) நிரல்கள் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= T_{xx} = \frac{1}{n}\sum_i T_{xi}^2 - \frac{T_x^2}{N}$$

$= (4) - (2)$

$= 183.34.$

(8) வரிசைகள் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= R_{xx} = \frac{1}{p}\sum_i T^2_{x\cdot j} - \frac{T_x^2}{N}$$

$= (5) - (2)$

$= 146.97$

(9) பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$= E_{xx}$

$= S_{xx} - (T_{xx} + R_{xx})$

$= (6) - (7) - (8)$

$= 647.86$

y மாறி:

(1) மொத்த கூட்டுத் தொகை $= T_y = 290.0.$

(2) சரியீட்டளவு $= \frac{T_y^2}{N} = \frac{(290.0)^2}{3} = \frac{84100.00}{30}$

$= 2803.33$

(3) $\sum_i \sum_j y_{ij} = (8.3)^2 + (7.2)^2 + \dots + 12.0)^2 + (11.8)^2$

$= 3052.10$

(4) $\frac{1}{n}\sum_{i} T_{yi}^2 = \frac{(39.4)^2 + (51.0)^2 + (51.1)^2 + 66.5)^2 + (82.0)^2}{6}$

$= \frac{17910.82}{6}$

$= 2985.14$

(5) $\frac{1}{p}\sum_{j} T_{y.j}^2$

$= \frac{(55.5)^2 + (51.5)^2 + (44.5)^2 + (48.2)^2 + (46.6)^2 + (43.7)^2}{5}$

$= \frac{14117.24}{5}$

$= 2823.45$

(6) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\} = S_{yy} = \sum_{i}\sum_{j} y_{ij}^2 - \frac{T_y^2}{N}$

$= (3) - (2)$

$= 248.77$

(7) நிரல்கள் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\} = T_{yy} = \frac{1}{n}\sum_{i} T_{yi.}^2 - \frac{T_y^2}{N}$

$= (4) - (2)$

$= 181.81$

(8) வரிசைகள் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $\} = R_{yy} = \frac{1}{p}\sum_{j} T_{yj}^2 - \frac{T_y^2}{N}$

$= (3) - (2)]$

$= 20.12$

(9) பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= E_{yy}$

$= S_{yy} - (T_{yy} + R_{yy})$

$= (6) - (7) - (8)$

$= 46.84$

x×y

(1) மொத்தக் கூட்டுத் தொகைகள்: $T_x = 1255;\ T_y = 290$

(2) சரியீட்டளவு $= \dfrac{T_x \cdot T_y}{N} = \dfrac{363950}{30}$

$$= 12131.67$$

(3) $\sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij} = (44 \times 8.3) + (36 \times 7.2) + \ldots + (41 \times 12.0) + (38 \times 11.8)$

$$= 12966.00$$

(4) $\dfrac{1}{n} \sum_i T_{xi\cdot} T_{yi\cdot}$

$$= \frac{(224 \times 39.4) + (250 \times 51.0) + \cdots + (266 \times 82.0)}{6}$$

$$= \frac{73754.3}{6}$$

$$= 12292.38$$

(5) $\dfrac{1}{p} \sum_j T_{x\cdot j}\ T_{y\cdot j}$

$$= \frac{(227 \times 55.5) + (214 \times 51.5) + \ldots + (194 \times 43.7)}{5}$$

$$= \frac{60916.4}{5}$$

$$= 12183.28$$

(6) மொத்தப் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை

$$= S_{xy}$$

$$S_{xy} = \sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij} - \frac{T_x \cdot T_y}{N}$$

$$= (3) - (2)$$

$$= 354.33$$

(7) நிரல்கள் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை $= T_{xy}$

$$T_{xy} = \frac{1}{n} \sum_i T_{xi.}\ T_{yi.} - \frac{T_x . T_y}{N}$$

$$= (4) - (2)$$

$$= 160.71$$

(8) வரிசைகள் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை $= R_{xy}$

$$R_{xy} = \frac{1}{p} \sum_j T_{x.j} T_{y.j} - \frac{T_x . T_y}{N}$$

$$= (5) - (2)$$

$$= 51.61$$

(9) பிழை பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை $= E_{xy}$

$$E_{xy} = S_{xy} - (T_{xy} + R_{xy})$$

$$= (6) - (7)\ (8)$$

$$= 142.01$$

x, y மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு $= \frac{E_{xy}}{E_{xx}}$

$$= \frac{142.01}{647.86}$$

$$= 0.22$$

b—ன் மதிப்பு பொருளுடையதாக உள்ளதா எனச் சோதனை செய்ய:

$$F = \frac{E_{xy}^2 / E_{xx}}{E_{yy} - E_{xy}^2 / E_{xx}} \times (N - p - n)$$

$$= \frac{(142.01)^2 / 647.86}{46.84 - (142.01)^2 / 647.86} \times (30 - 5 - 6)$$

$$= \frac{31.13 \times 19}{46.84 - 31.13}$$

$$= 37.71 > F_{.01, 1, 19} = 8.18$$

எனவே b-ன் மதிப்பு பொருளுடையதாக உள்ளது.

இனி மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட நிரல்களின் கூட்டிடைகளையும், வரிசைகளின் கூட்டிடைகளையும் சோதனையிட உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு அட்டவணையை அமைக்கலாம்.

அட்டவணை 4.2.5

உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை		பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை	வரையற்ற பாகைகள்	சரி செய்யப்பட்ட வர்க்கர் களின் கூட்டுத் தொகை
		x	y			
நிரல்கள்	4	183.84	181.81	160.71		
வரிசைகள்	5	146.97	20.12	51.61		
பிழை	20	649.86	46.84	142.01	19	$46.84 \frac{(142.01)^2}{647.86}$ = 15.17
மொத்தம்	29	978.17	243.77	354.33		
நிரல்கள் + பிழை	24	831.20	228.65	302.72	23	$228.65 - \frac{(302.72)^2}{831.20}$ = 118.40
வரிசைகள் + பிழை	25	794.83	66.96	193.62	24	$66.96 - \frac{(193.62)^2}{794.83}$ = 19.79
மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட நிரல்கள்					4	118.40—15.71 = 102.69
மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட வரிசைகள்					5	19.79—15.71 = 4.08

x உடன் y-ன் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட நிரல்களின் கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோளைச் சோதனையிட,

$$F = \frac{T^a_{yy}/(p-1)}{E^a_{yy}/(N-p-n)} = \frac{T^a_{yy}\cdot(N-p-n)}{E^a_{yy}\cdot(p-1)}$$

$$= \frac{102.69 \times 19}{15.71 \times 4} = 31.04$$

$F = 31.04 > F_{.01,\ 4,\ 19} = 4.50$ ஆக இருப்பதால் சரி செய்யப்பட்ட நிரல்களின் கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுகின்றது.

3. லட்டீன் சதுரம்—உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு

லட்டீன் சதுரத்தில் அமைந்துள்ள x, y மாறிகளின் விவரங்களை ஆராயும் முறையைக் காண்போம். லட்டீன் சதுரத்தில் x, y மாறிகளின் விவரங்கள் பின்வருமாறு அமையும்.

அட்டவணை 4. 3. 1

லட்டீன் சதுரம்

B x_{11}, y_{11}	D x_{21}, y_{21}	C x_{31}, y_{31}	A x_{41}, y_{41}	E x_{51}, y_{51}
C x_{12}, y_{12}	A x_{22}, y_{22}	E x_{32}, y_{32}	B x_{42}, y_{42}	D x_{52}, y_{52}
E x_{13}, y_{13}	C x_{23}, y_{23}	B x_{33}, y_{33}	D x_{43}, y_{43}	A x_{53}, y_{53}
D x_{14}, y_{14}	B x_{24}, y_{24}	A x_{34}, y_{34}	E x_{44}, y_{44}	C x_{54}, y_{54}
A x_{15}, y_{15}	E x_{25}, y_{25}	D x_{35}, y_{35}	C x_{45}, y_{45}	B x_{55}, y_{55}

லட்டின் சதுரம் உடன்மாறுபாட்டு ஆய்விற்கான பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகைகளையும், வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைகளையும் இரு வழிப்பிரிவின் முடிவுகளைச் சிறிது விரிவுபடுத்துவதன் மூலம் பெறலாம்.

$m \times m$ லட்டின் சதுரத்தில்,

x_{ij}, y_{ij} = iஆவது நிரலில் j ஆவது வரிசையில் உள்ள x, y மதிப்புகள். $i = 1, 2, \ldots m$ $\quad j = 1, 2, \ldots m$.

$\bar{x}_{i\cdot}, \bar{y}_{i}$ = iஆவது நிரலின் x, y கூட்டிடைகள்.

$\bar{x}_{\cdot j}, \bar{y}_{j}$ = jஆவது வரிசையின் x, y கூட்டிடைகள்.

$\bar{x}_{k\cdot}, \bar{y}_{k\cdot}$ = kஆவது எழுத்துகுறிக்கும் நடத்துமுறையின் x, y கூட்டிடைகள் $k = 1, 2, \ldots m$.

$\bar{x}$; $\bar{y}$ = பொதுக்கூட்டிடைகள்.

$$\bar{x}_{i\cdot} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \frac{T_{xi}}{m} \qquad \bar{y}_{i\cdot} = \frac{T_{yi}}{m}$$

$$\bar{x}_{ij} = \frac{T_{x\cdot j}}{m} \qquad \bar{y}_{\cdot j} = \frac{T_{y\cdot j}}{m}$$

$$\bar{x}_{k\cdot} = \frac{T_{x\cdot k}}{m} \qquad \bar{y}_{k\cdot} = \frac{T_{y\cdot k}}{m}$$

$$\bar{x} = \frac{T_x}{m^2} \qquad \bar{y} = \frac{T_y}{m^2}$$

லட்டின் சதுரத்தில், மொத்தப் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை நான்காகப் பிரிக்கப்படுகின்றது.

மொத்தப் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை = நிரல் பெருக்குத்தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை + வரிசை பெருக்குத்தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை + நடத்துமுறை பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை + பிழைபெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை.

மொத்தப் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை = S_{xy}.

$$S_{xy}=\sum_i \sum_j (x_{ij}-\bar{x})(y_{ij}-\bar{y})$$

$$=\sum_i \sum_j x_{ij}\, y_{ij} - \frac{T_x\, T_y}{m^2}$$

நிரல் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை $=C_{xy}$

$$C_{xy}=m \sum_i (\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})(\bar{y}_i-\bar{y})$$

$$=\frac{1}{m}\sum_i T_{xi\cdot}\ T_{yi}-\frac{T_x\, T_y}{m^2}$$

வரிசை பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை $=R_{xy}$

$$R_{xy}=m \sum_j (\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y})$$

$$=\frac{1}{m}\sum_j T_{x\cdot j}\ T_{y\cdot j}=\frac{T_x\, T_y}{m^2}$$

நடத்துமுறை பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை $=T_{xy}$

$$T_{xy}=m \sum_k (\bar{x}_{k\cdot}-\bar{x})(\bar{y}_{k\cdot}-\bar{y})$$

$$=\frac{1}{m}\sum_k T_{x\cdot k}\ T_{y\cdot k}-\frac{T_x\, T_y}{m^2}$$

பிழை பெருக்குத்தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை $=E_{xy}$

$$E_{xy}=S_{xy}-(C_{xy}+R_{xy}+T_{xy})$$

இவற்றிற்குரிய வ்ரையற்ற பாகைகள் முறையே, (m^2-1) $(m-1)$, $(m-1)$, $(m-1)$, $(m-1)$, $(m-2)$.

ஒரு படித்தான முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப் பட்ட ராண்டம் மாதிரிகள் என்ற தற்கோளின் கீழ்,

$$\frac{S_{xy}}{m^2-1},\ \frac{C_{xy}}{m-1},\ \frac{R_{xy}}{m-1},\ \frac{T_{xy}}{m-1},\ \frac{E_{xy}}{(m-1)(m-2)}$$ என்பன

முழுமைத் தொகுதியின் உடன் மாறுபாட்டின் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீடுகளாகும்.

முழுமைத் தொகுதியில் x, y மாறிகளின் மாறுபாடுகளின் மதிப்பீடுகளைப் பெறலாம்.

x மாறிக்கான,

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= S_{xx}$

$$S_{xx} = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2$$

$$= \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{T_x^2}{m^2}$$

நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= C_{xx}$

$$C_{xx} = m \sum_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{m} \sum_i T_{xi}^2 - \frac{T_x^2}{m^2}$$

வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= R_{xx}$

$$R_{xx} = m \sum_j (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{m} \sum_i T^2_{x.j} - \frac{T_x^2}{m^2}$$

நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுதொகை $= T_{xx}$

$$T_{xx} = m \sum_k (\bar{x}_k - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{m} \sum_k T_{xk}^2 = \frac{T^{x2}}{m^2}$$

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= E_{xx}$

$$E_{xx} = S_{xx} - (C_{xx} + R_{xx} + E_{xx})$$

இவற்றிற்கான வரையற்ற பாகைகள் முறையே,

$(m^2 - 1)$, $(m - 1)$, $(m - 1)$, $(m - 1)$, $(m - 1)(m - 2)$.

y மாறிக்கான,

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= S_{yy}$

$$S_{yy} = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y})^2$$

$$= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{T_y^2}{m^2}$$

நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= C_{yy}$

$$C_{yy} = m \sum_i (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y})^2$$

$$= \frac{1}{m} \sum_i T_{yi}^2 - \frac{T_y^2}{m^2}$$

வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= R_{yy}$

$$R_{yy} = m \sum_j (\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y})^2$$

$$= \frac{1}{m} \sum_j T^2_{yj} - \frac{T_y^2}{m^2}$$

நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= T_{yy}$

$$T_{yy} = m \sum_k (\bar{y}k\cdot - \bar{y})^2$$

$$= \frac{1}{m} \sum_k T_{y\cdot k}^2 - \frac{T_y^2}{m^2}$$

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= E_{yy}$

$$E_{yy} = S_{yy} - (C_{yy} + R_{yy} + T_{yy})$$

இவற்றிற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் முறையே,

(m^2-1) , $(m-1)$, $(m-1)$, $(m-1)$, $(m-1)\ (m-2)$.

மேற்கூறியவற்றை ஓர் அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

பிழை கூட்டுத் தொகைகளிலிருந்து தொடர்புக்கெழுவின் மதிப்பீட்டைப் பெறலாம்.

மாறிகளின் தொடர்புக்கெழு $b = \dfrac{E_{xy}}{E_{xx}}$

மாறிகளின் தொடர்புக்கெழு b-ன் மதிப்பு பொருளுடைய தாக உள்ளதா என்பதைச் சோதனையிட்டறியலாம்.

$$\frac{E^2{}_{xy}/E_{xx}}{E_{yy}-E^2{}_{xy}/E_{xx}} \times \{(m-1)\ (m-2)-1\}$$ என்ற

மதிப்பு 1, $(m-1)\ (m-2)-1$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்டு F ஆகப் பரவியுள்ளது. இதைக் கொண்டு b ஐச் சோதனையிடு கிறோம்.

இனி மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்த நடத்து முறைகளின் கூட்டிடைகளைச் சோதனையிடும் முறையினைக் காணலாம்.

சரி செய்யப்பட்ட பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= E^a{}_{yy}$

$$E^a{}_{yy} = E_{yy} - \frac{E^2{}_{xy}}{E_{xx}}$$; வரையற்ற பாகைகள் $= (m-1)(m-2)-1$

$$\left.\begin{array}{l}\text{நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை} +\\ \text{பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை}\end{array}\right\} = T_{yy} + E_{yy}$$

சரி செய்யப்பட்ட $(T_{yy} + E_{yy}) \qquad = (T_{yy} + E_{yy})^a$

$$(T_{yy} + E_{yy})^a = T_{yy} + E_{yy} - \frac{T_{xy} + E_{xy})^2}{T_{xx} + E_{xx}}$$

வரையற்ற பாகைகள் $= (m-1) + (m-1)\ (m-2)-1$
$= m^2 - 2m.$

$$\left.\begin{array}{r}\text{சரிசெய்யப்பட்ட நடத்துமுறை வர்க்கங்களின்}\\ \text{கூட்டுத்தொகை}\end{array}\right\} = T^a{}_{yy}$$

$$T^a{}_{yy} = (T_{yy} + E_{yy})^a - E^a{}_{yy}$$

வரையற்ற பாகைகள் $= m^2 - 2m - \{(m-1)\ (m-2) - 1\}$
$= (m-1).$

இவற்றைக் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் குறிக்கிறோம்.

அட்டவணை 4.3.2

உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு அட்டவணை-லட்டீன் சதுரம்.

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை x	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை y	பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை	வரையற்ற பாகைகள்	சரி செய்யப்பட்ட வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை
நிரல்கள்	$(m-1)$	C_{xx}	C_{yy}	C_{xy}		
வரிசைகள்	$(m-1)$	R_{xx}	R_{yy}	R_{xy}		
நடத்து முறைகள்	$(m-1)$	T_{xx}	T_{yy}	T_{xy}		
பிழை	$(m-1)\times(m-2)$	E_{xx}	E_{yy}	E_{xy}	$(m-1)\times(m-2)-1$	$E^a_{yy} = E_{yy} - \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}}$
மொத்தம்	m^2-1	S_{xx}	S_{yy}	S_{xy}		
நடத்து முறைகள் + பிழை	$(m-1)+(m-1)\times(m-2)$	$T_{xx}+E_{xx}$	$T_{yy}+E_{yy}$	$T_{xy}+E_{xy}$	(m^2-2m)	$(T_{yy}+E_{yy})^a = (T_{yy}+E_{yy}) - \frac{(T_{xy}+E_{xy})^2}{T_{xx}+E_{xx}}$
மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரிசெய்யப்பட்ட நடத்துமுறைகள்					$(m-1)$	$(T_{yy}+E_{yy})^2 - E^a_{yy} = T^a_{yy}$

மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரிசெய்யப்பட்ட நடத்து முறைகளின் கூட்டிடைகளைச் சோதனை செய்ய,

$\frac{T^a_{yy}}{(m-1)}$ ஐ $\frac{E^a_{yy}}{\{(m-1)\ (m-2)-1\}}$ உடன் ஒப்பிடுகிறோம்.

$\frac{T^a_{yy}/(m-1)}{E^a_{yy}/\{(m-1)(m-2)-1\}}$, $(m-1), \{(m-1)(m-2)-1\}$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட F ஆகப் பரவியுள்ளது

அட்டவணை 4.3.3 **நிரல்கள்**

வரிசைகள்							
1		C	A	B	D	E	
	x	17	32	22	25	27	123
	y	109	126	115	120	126	596
2		A	D	E	B	C	
	x	25	30	23	28	25	131
	y	116	132	122	121	117	608
3		D	B	C	E	A	
	x	18	29	24	29	21	121
	y	118	114	116	128	113	589
4		E	C	D	A	B	
	x	29	22	26	21	26	124
	y	128	119	130	113	119	609
5		B	E	A	C	D	
	x	27	22	31	26	29	135
	y	120	121	171	117	129	604
மொத்தம்	x	116	135	126	129	128	634
	y	591	612	600	599	604	3006

எனவே,

$$\frac{T^a_{yy}/(m-1)}{E^a_{yy}/\{m-1)\ (m-2)\ -1\}} = F \geq F_{\alpha}\left((m-1)\ (m-1)\ (m-2)\ -\ 1\right)$$

ஆக இருந்தால் சரி செய்யப்பட்ட நடத்துமுறைகளின்

கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோள் தள்ளப்படுகின்றது.

இதேபோல, சரிசெய்யப்பட்ட நிரல்களின் கூட்டிடைகளையும், சரி செய்யப்பட்ட வரிசைகளின் கூட்டிடைகளையும் சோதனையிடலாம்.

லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டத்தில் தரப்பட்டுள்ள x, y மாறிகளின் விவரங்களுக்கு உடன் மாறுபட்டு ஆய்வு முறையைப் பயன்படுத்தி, x-ன் மீதான y-ன் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்த பின்பு y-ன் நடத்துமுறை கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் உள்ளனவா எனச் சோதனை செய்யலாம்.

கணக்கீடுகள் :

$x-25$, $y-120$ எனக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்டுள்ளன.

x மாறி:

(1) சரியீட்டளவு $= \dfrac{T^2{}_x}{m^2} = \dfrac{9^2}{25} = 3.24$

(2) $\sum\limits_i \sum\limits_j x^2{}_{ij} = (-8)^2 + (-7)^2 + \ldots\ldots + (1)^2 + (4)^2$

$= 371$

(3) $\dfrac{1}{m} \sum\limits_i T^2{}_{xi\cdot} = \dfrac{(-9)^2 + (10)^2 + (1)^2 + (4)^2 + (3)^2}{5}$

$= \dfrac{207}{5} = 41.40$

(4) $\dfrac{1}{m} \sum\limits_j T^2{}_{x\cdot j} = \dfrac{(-2)^2 + (6)^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + (10)^2}{5}$

$= \dfrac{157}{5} = 31.40$

(5) $\dfrac{1}{m} \sum\limits_k T^2{}_{x\cdot k} = \dfrac{(5)^2 + (7)^2 + (-11)^2 + (3)^2 + (5)^2}{5}$

$= \dfrac{229}{5} = 45.80$

(6) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S_{xx} = \sum_i \sum_j x^2_{ij} - \frac{T^2_x}{m^2}$$

$$= (2) - (1)$$

$$= 367.76$$

(7) நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= C_{xx} = \frac{1}{m} \sum_i T^2_{xi} - \frac{T^2_x}{m^2}$$

$$= (3) - (1)$$

$$= 38.16$$

(8) வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= R_{xx} = \frac{1}{m} \sum_j T^2_{x \cdot j} - \frac{T^2_x}{m^2}$$

$$= (4) - (1)$$

$$= 28.16$$

(9) நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= T_{xx} = \frac{1}{m} \sum_k T^2_{x \cdot k} - \frac{T^2_x}{m^2}$$

$$= (5) - (1)$$

$$= 42.56$$

(10) பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= E_{xx} = S_{xx} - C_{xx} - R_{xx} - T_{xx}$$

$$= (6) - (7) - (8) - (9)$$

$$= 258.88$$

y மாறி:

(1) சரியீட்டளவு $= \frac{T^2_y}{m^2} = \frac{6^2}{25} = 1.44$

(2) $\sum_i \sum_j y^2_{ij} = (-11)^2 + (-4)^2 + \ldots\ldots + (-1)^2 + (9)^2$

$= 876$

(3) $\frac{1}{m}\sum_i T^2_{y\cdot i} = \frac{(-9)^2 + (12)^2 + (-1)^2 + (4)^2}{5}$

$= \frac{242}{5} = 48.40$

(4) $\frac{1}{m}\sum_j T^2_{y\cdot j} = \frac{(-4)^2 + (8)^2 + (-11)^2 + (9)^2 + (4)^2}{5}$

$= \frac{298}{5} = 59.60$

(5) $\frac{1}{m}\sum_k T^2_{y\cdot k} = \frac{(-15)^2 + (-11)^2 + (-22)^2 + (29)^2 + (25)^2}{5}$

$= \frac{2296}{5} = 459.20$

(6) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$= S_{yy} = \sum_i \sum_j y^2_{ij} - \frac{T^2_y}{m^2}$

$= (2) - (1)$

$= 874.56$

(7) நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$= C_{yy} = \frac{1}{m}\sum_i T^2_{yi} - \frac{T^2_y}{m^2}$

$= (3) - (1)$

$= 46.96$

(8) வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$= R_{yy} = \frac{1}{m}\sum_j T^2_{y\cdot j} - \frac{T^2_y}{m^2}$

$$= (4) - (1)$$

$$= 57.16$$

(9) நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= T_{yy} = \frac{1}{m} \sum_k T^2_{y \cdot k} - \frac{T^2_y}{m^2}$$

$$= (5) - (1)$$

$$= 457.76$$

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= E_{yy} = S_{yy} - C_{yy} - R_{yy} - T_{yy}$$

$$= (6) - (7) - (8) - (9)$$

$$= 312.68$$

x × y:

(1) சரியீட்டளவு $= \frac{T_x \cdot T_y}{m^2}$

$$= \frac{9 \times 6}{25} = \frac{54}{25} = 2.16$$

(2) $\sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij} = (-8) \times (-11) + (0) \times (-4) + \ldots \ldots + (4) \times (9)$

$$= 354$$

(3) $\frac{1}{m} \sum_i T_{xi \cdot} \; T_{yi \cdot}$

$$= \frac{(-9 \times -9) + (10 \times 12) + (4 \times -1) + (3 \times 4)}{5}$$

$$= \frac{209}{5} = 41.80$$

(4) $\frac{1}{m}\sum_{j} T_{x\cdot j}\ T_{y\cdot j}$

$$=\frac{(-2\times-4)+(6\times8)+(-4\times-11)+(-1\times9)+(10\times4)}{5}$$

$$=\frac{131}{5}=26{\cdot}20$$

(5) $\frac{1}{m}\sum_{k} T_{x\ k}\ T_{y\cdot k}$

$$=\frac{(5\times-15)+(7\times-11)+(-11\times-22)+(3\times29)+(5\times25)}{5}$$

$$=\frac{302}{5}=60.40$$

(6) மொத்த பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை $= S_{xy}$

$$S_{xy}=\sum_{i}\sum_{j} x_{ij}\, y_{ij}-\frac{T_x\ .\ T_y}{m^2}$$

$$=(2)-(1)$$

$$=351.84$$

(7) நிரல் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை $= C_{xy}$

$$C_{xy}=\frac{1}{m}\sum_{i} T_{xi}T_{y\ i}-\frac{T_x\ .\ T_y}{m^2}$$

$$=(3)-(1)$$

$$=39{\cdot}64$$

(8) வரிசை பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை $= R_{xy}$

$$R_{xy}=\frac{1}{m}\sum_{j} T_{xy}\ T_{yj}-\frac{T_x\ T_y}{m^2}$$

$$= (4) - (1)$$

$$= 24.04$$

(9) நடத்துமுறை பெருக்குத்தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை $= T_{xy}$

$$T_{xy} = \frac{1}{m} \sum_k T_{x \cdot k}\, T_{y \cdot k} = \frac{T_x . T_y}{m^2}$$

$$= (5) - (1)$$

$$= 58 \cdot 24$$

(10) பிழை பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை$= E_{xy}$

$$E_{xy} = S_{xy} - C_{xy} - R_{xy} - T_{xy}$$

$$= 229.92$$

மாறிகளின் தொடர்புக்கெழுவின் மதிப்பீடு

$$b = \frac{E_{xy}}{E_{xx}} = \frac{229.92}{258.88}$$

$$= 0.89$$

தொடர்புக் கெழுவின் மதிப்பீடு பொருளுடையதாக உள்ளதா எனச் சோதனை செய்ய,

$$F = \frac{E^2_{xy}/E_{xx}}{E_{yy} - E^2_{xy}/E_{xx}} \times \{(m-1)(m-2)-1\}$$

$$= \frac{(229.92)^2/258.78}{312-68 - \frac{(229.92)^2}{258.88}} \times 11$$

$$= \frac{204\ 20}{512.68 - 204.20} \times 11$$

$$= 20.69$$

$$F = 20.69 > F_{.01, 1, 11} = 9.65$$

எனவே, b பொருளுடையதாக இருக்கின்றது.

இனி மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரிசெய்த நடத்துமுறைகளின் கூட்டிடைகளைச் சோதனை செய்யலாம்.

x-ன் மீதான y-ன் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட y-ன் பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= E^a_{yy}$

$$E^a_{yy} - E_{yy} - \frac{E^a_{xy}}{E_{xx}}$$

$$= 108 \cdot 48$$

நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை + பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை } $T_{yy} + E_{yy}$

சரி செய்யப்பட்ட $(T_{yy} + E_{yy}) = (T_{yy} + E_{yy})^a$

$$(T_{yy} + E_{yy})^a = T_{yy} + E_{yy} - \frac{(T_{xy} + E_{xy})^2}{(T_{xx} + E_{xx})}$$

$$= 770.44 - \frac{(288 \cdot 16)^2}{301.44}$$

$$= 770.44 - 275.50$$

$$= 494.94$$

சரி செய்யப்பட்ட நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= T^a_{yy}$

$$T^a_{yy} = (T_{yy} + E_{yy})^a - E^a_{yy}$$

$$= 494.94 - 108.48$$

$$= 386.46$$

அட்டவணை 4.3.4

உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை		பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை	வரையற்ற பாகைகள்	சரிசெய்யப்பட்ட வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
		X	Y			
நிரல்கள்	4	38.16	46.96	39.64		
வரிசைகள்	4	28.16	57.16	24.04		
நடத்து முறைகள்	4	42.56	457.70	58.24		
பிழை	12	258.88	312.68	229.92	11	$E^a_{yy} = 108.48$
மொத்தம்	24	367.76	874.56	351.84		
நடத்து முறைகள் + பிழை	16	301.44	770.44	288.16	15	$(T_{yy} + E_{yy})^a = 494.94$
மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட நடத்துமுறைகள்					4	$T^a_{yy} . 386.46$

சரிசெய்யப்பட்ட நடத்துமுறைகளைச் சோதனை செய்ய,

$$F = \frac{T^a_{yy}/(m-1)}{E^a_{yy}/\{(m-1)\ (m-2)-1\}}$$

$$= \frac{386.46/4}{103.48/11}$$

$$= 9.77$$

$$F = 9.77 > F_{.01,4,11} = 5.67$$

எனவே, சரிசெய்யப்பட்ட நடத்துமுறைக் கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோள் தள்ளப்படுகின்றது. சரிசெய்யப்பட்ட நடத்துமுறைக் கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் இருக்கின்றன.

5. செய் முறைத் திட்டத்தின் அடிப்படைக் கொள்கைகள்

ஒரு பரிசோதனையில் ஒப்பிடப்படும் பொருள்கள் அல்லது செயல்முறைகள் நடத்துமுறைகள் எனப்படுகின்றன. பலவகை உரங்கள் விளைச்சல்களை எவ்வாறு பாதிக்கின்றன என்பதனை அறிய நடத்தும் சோதனையில் விளைச்சல்களைக் கொண்டு உரங்கள் ஒப்பிடப்படுகின்றன. இச் சோதனையில் உரங்கள் நடத்துமுறைகளாகும். சில குறிப்பிட்ட தீவனங்கள் பசுக்கள் தரும் பாலின் அளவுகளை அதிகப் படுத்துகின்றனவா என அறிய நடத்தப்படும் சோதனையில் பசுக்கள் தரும் பாலின் அளவுகளைக் கொண்டு தீவனங்கள் ஒப்பிடப்படுகின்றன. இங்குத் தீவனங்கள் நடத்துமுறைகளாக அமைகின்றன. கற்பிக்கும் முறைகள் (teachimg methods) பற்றிய சோதனையில் கற்பிக்கும் முறைகள் நடத்து முறைகளாகும்.

பரிசோதனைகளில் நடத்துமுறைகளைப் பெறுபவைகளின் தொகுதி பரிசோதனைக்கூறு அல்லது செய்முறைச் சாதனம் (Experimental material) எனப்படுகின்றது. உரங்களைப் பெறும் நிலக்கூறுகளின் தொகுதியும், தீவனங்களைப் பெறும் பசுக்களின் தொகுதியும் செய்முறைச் சாதனங்களாகும். பரிசோதனைகளில் செய்முறைச் சாதனங்கள் ஒரேமாதிரியாக அமைவதில்லை. நிலத்தின் வளம் இடத்திற்கு இடம் வேறுபடுகின்றது. பசுக்கள் ஒன்றுக்கொன்று வயது, எடை உடல்நிலை ஆகியவற்றில் வேறு பட்டிருக்கின்றன. எனவே, எல்லா செய்முறைச் சாதனங் களிலும் மாறுபாடுகள் உள்ளன என்பதை எவரும் மறுத்திடல் இயலாது.

செய்முறைச் சாதனம் பல கூறுகளாகப் பிரிக்கப் பட்டு ஒவ் வொரு கூறிலும் ஒவ்வொரு நடத்துமுறை பயன்படுத்தப்படு

கின்றது. ஒரு தடவையில் ஒரு நடத்துமுறை பயன்படுத்தப்படும் செய்முறைச் சாதனத்தின் அளவு செய்முறை அடிப்படைக்கூறு (Experimental unit) எனப்படுகின்றது. அடிப்படைக்கூறு என்பது நிலத்தின் ஒரு சிறு பகுதியாக (plot) இருக்கலாம்; ஒரு பசுவாக இருக்கலாம்; பள்ளியில் உள்ள ஒரு மாணவனுகி இருக்கலாம்; மருத்துவ மனையில் உள்ள ஒரு நோயாளியாகவும் இருக்கலாம்.

அடிப்படைக் கூறுகள் நடத்துமுறைகளினுல் மட்டுமன்றி அயலினப் பிறப்புடைய மாறுபாடுகளினுலும் பாதிக்கப்படுகின்றன. எனவே, ஒரே நடத்துமுறையைப் பெறும் அடிப்படைக்கூறுகளும் வெவ்வேறு முடிவுகளைத் தருகின்றன. அயலினப் பிறப்புடைய மாறுபாடுகள் செய்முறைப் பிழைகள் (Experimental errors) எனப்படுகின்றன. செய்முறைப் பிழைகளுக்கான மூலகாரணங்கள் இரண்டு. முதலாவது நடத்துமுறைகளைப் பெறும் செய்முறைச் சாதனத்திலுள்ள மாறுபாடுகள். இம் மாறுபாடுகளினுல் அடிப்படைக் கூறுகள் ஒரே மாதிரியாக அமைவதில்லை. அடிப்படைக் கூறுகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடுகள் பெரிதாயினும் சிறிதாயினும் செய்முறைப் பிழைகளை ஏற்படுத்துகின்றன. பரிசோதனையை ஒரே சீராக வேறுபாடில்லாமல் நடத்தாதது செய்முறைப் பிழைகளுக்கான மற்ருெரு காரணமாகும். பரிசோதனை முறையை ஒழுங்குபடுத்துவதன் மூலம், இம்மாதிரியான பிழைகளைக் குறைக்கலாம். செய்முறைத் திட்டங்களின் முக்கிய நோக்கம், செய்முறைப் பிழைகளைக் குறைத்தலும், மதிப்பிடுதலும் ஆகும். இதன் பொருட்டுத் திட்டங்களில் ராண்டம் முறைப்படுத்தலும் (Randomis tion), திரும்பச் செய்தலும் (Replication) மேற்கொள்ளப்படுகின்றன.

ராண்டம் முறைப்படுத்துதல்

பரிசோதனைகளில் அடுத்தடுத்து உள்ள அடிப்படைக் கூறுகளில் உள்ள செய்முறைப் பிழைகள் நேர்முகத் தொடர்புடையனவாக இருக்கும் எனக்கருத இடமுண்டு. இந் நேர்முகத் தொடர்பினுல் ஏற்படும் சிக்கலிலிருந்து விடுபட ராண்டம் முறைப்படுத்துதல் பயன்படுகின்றது. ராண்டம் முறைப்படுத்துதலின்படி நடத்துமுறைகள் அடிப்படைக்கூறுகளில் சமவாய்ப்பு முறையில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இதன்படி, குறிப்பிட்ட ஏதாவது இரண்டு நடத்துமுறைகள் அடுத்தடுத்துள்ள அடிப்படைக்கூறுகளில் பயன்படுத்தப்படவும், அடுத்தடுத்தில்லாத அடிப்படைக்கூறுகளில் பயன்படுத்தப்படவும் ஒரே அளவிலான நிகழ்திறத்தைப் பெற்றிருக்-

ருக்கின்றன. எனவே, ஏதாவதொரு நடத்துமுறைக்கான செய் முறைப்பிழையின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு (expected value) மற்ற எந்த ஒரு நடத்துமுறைக்கான செய்முறைப் பிழையின் எதிர் பார்க்கப்படும் மதிப்பினையும் சாராது உள்ளது. தொடர்பற்ற பிழைகள் என பரிசோதனைத்திட்டங்களில் மேற்கொள்ளும் தற் கோள் இதனால் உண்மையாகின்றது.

செய்முறைச்சாதனத்தில் உள்ள மாறுபாடுகளின் தன்மை யால் நடத்துமுறைகளை அதில் பயன்படுத்தும் பொழுது சில குறிப்பிட்ட நடத்துமுறைகள் தொடர்ச்சியாக அனுகூலத்தை யோ அல்லது இடையூற்றையோ பெற வாய்ப்பு உண்டு. அவ் வாறு பெற்றிருப்பின், பரிசோதனையின் முடிவுகள் ஒருபுறச்சாய் வாக அமையும். இவ்வாறு ஒருபுறச்சாய்வு ஏற்படாமல் இருக்க நடத்துமுறைகள் ராண்டம் முறையில் பரிசோதனைக் கூறுகளில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. குறிப்பிட்ட ராண்டம் முறை ஏதா வதொரு நடத்துமுறைக்கு அனுகூலமாக இருக்கக் கூடும். ஆனால், இவ்வாறு அனுகூலமாக அமைவது சிறப்புகாண் சோதனைகளுக்கும், நம்பிக்கை எல்லைகளுக்குமான கணிப்புகளில் அனுமதிக்கப்படும் அளவிலேயே உள்ளது. பரிசோதனையில் ராண்டம் முறை சரியான முறையில் பயன்படுத்தப்பட்டிருந் தால் எவ்வாறு சிறப்புகாண் சோதனையையும் நம்பிக்கை எல்லைகளையும் அமைக்கலாம் என்பதை ஒரு சோதனையைக் கொண்டு ஃபிசர் விளக்கியுள்ளார். தேநீர் தயாரிக்கையில் கோப்பையில் முதலில் ஊற்றப்பட்டது பாலா அல்லது தேயிலை வடிசாறு (tea infusion) என்பதைத் தன்னால் தேநீரைச் சுவை பார்த்துக் கூறமுடியும் என்று ஒரு பெண் கூறுவதை எவ்வாறு சோதிப்பது என்பதை எடுத்துக்காட்டாகக் கொண்டு ஃபிசர் பரிசோதனைத்திட்டங்களுக்கான அடிப்படைக் கொள்கைகளை விளக்குகின்றார். அதில், ராண்டம் முறைப்படுத்துதல் எவ் வாறு பரிசோதனையில் வரக்கூடிய ஒருபுறச் சாய்வை நீக்கப் பயன்படுகின்றது என்பதனை விளக்குகின்றார்.

பரிசோதனையில், செய்முறைச் சாதனத்தில் நடத்து முறை களைப் பயன்படுத்த ராண்டம் முறை மேற்கொள்ளப்படுகின்றது. வேறுபட்ட உரங்களின் விளைவுகளை (effects) அறிய சோதனை செய்யப்படுகிறது எனக் கொள்வோம். அடிப்படைக் கூறுகளா கிய நிலக்கூறுகள் (plots) வளத்தில் ஒன்றுக்கொன்று வேறுபடு கின்றன. எனவே, நல்ல வளம் பொருந்திய நிலக்கூறுகளில் பயன்படுத்தப்படும் உரம் சிறந்ததாகக் கருத இடம் ஏற்படு கின்றது. அதனால், இந் நிலையைத் தவிர்க்க உரங்கள் நிலக்

கூறுகளுக்கு ராண்டம் முறையில் ஒதுக்கப்பட்டு பயன்படுத்தப் படுகின்றன.

திரும்பத் திரும்ப செய்யப்படும் செயல்வகையில், நிகழ்ச்சிகளின் வரிசை முக்கியமானதாக அமையக்கூடும். எடுத்துக்காட்டாக இருவகைத் தட்டெழுத்து இயந்திரங்களை வேகமாக அடிப்பதில் ஒப்பிடுவதாகக் கொள்வோம். திரும்பச் செய்தவற்றில் முதலில் முதல்வகை இயந்திரத்தைப் பயன்படுத்திய பின்பு இரண்டாவதுவகை இயந்திரத்தைப் பயன்படுத்துவதாகக் கொள்வோம். இம் முறையில் ஓர் இயந்திரத்திலேயே தொடர்ச்சியாகப்பல செயல்வகைகளைச் (operations) செய்வதால் அவ்வியந்திரத்தைப் பற்றி அறிந்து கொள்ள அல்லது பழகிக் கொள்ள வாய்ப்பு ஏற்படுகின்றது. இவ்வாறு அறிந்து கொள்வதால் பிற்பட்ட செயல்வகைகள் முந்தைய செயல்வகைகளை விட நன்கு அமையக்கூடும். சில சமயங்களில் களைப்பினால் பிற்பட்ட செயல்வகைகள் மோசமானதாக இருக்கக்கூடும். இவ்வாறு ஏற்படும் ஒரு சார்புத்தன்மைக்கு எதிராக ஒரு திரும்பச் செய்ததில் உள்ள செயல் வகைகளின் வரிசையை ராண்டம் முறைப்படுத்துதல் மூலம் பாதுகாப்பு ஏற்படுத்தலாம்.

செய்முறைத்திட்டங்கள் என்ற நூலில் காக்ரனும் காக்சும் ராண்டம் முறைப்படுத்துதலைக்காப்புறுதிக்கு (Insurance) ஒப்பிடுகின்றனர். ஒரு பரிசோதனையில் தொல்லைகள் (disturbances) ஏற்படலாம் அல்லது ஏற்படாமலும் இருக்கலாம். தொல்லைகள் ஏற்படினும் அவை முடிவுகளைப் பாதிக்கும் அளவு வினைமையுடையனவாக (serious) இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமல் இருக்கலாம். இத் தொல்லைகளுக்கு எதிரான முன்னெச்சரிக்கை நடவடிக்கையே ராண்டம் முறைப்படுத்துதலாகும். ராண்டம் முறைப்படுத்தாததினால் வினைமையுடைய ஒருபுறச்சாய்வு (serious bias) ஏற்படும் என்று எதிர்பார்க்கப்படாத பொழுதும், ராண்டம் முறைப் படுத்துவது பொதுவாக உசிதமானதாகும். இவ்வாறு செய்வதால் எதிர்பார்க்கப்படாத நிகழ்ச்சிகள் நடக்கும் பொழுது பாதுகாப்பாக அது அமைகிறது.

ராண்டம் முறைப்படுத்தலின் தனிச்சிறப்பு அது ஒரு தன்னின் வேறான பொதுமுறையான (objective and impersonal) முறையாகும். ராண்டம் முறையில் அமைப்பது என்பது ஏதோ ஓர் ஒழுங்கற்ற முறையில் அமைப்பது ஆகாது. பரிசோதனையில் ராண்டம் முறையைப் பயன்படுத்த ராண்டம் எண்களின் அட்டவணையையாவது, ராண்டம் வரிசை மாற்றங்களையாவது

உபயோகிக்கலாம். பரிசோதனைகளில் ராண்டம் முறை எவ்வாறு பயன்படுத்தப்படுகின்றது என்பதை அந்தந்தச் செய்முறைத்திட்டங்களில் காணலாம்.

ராண்டம்முறைப் படுத்துதலில் கட்டுப்பாடு

செய்முறைச் சாதனத்தில் மாறுபாடு இருக்கின்றது எனத் தெரியும் பொழுது, செய்முறைச் சாதனத்தை ஒரே மாதிரியாக உள்ள பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம். ஒரேமாதிரியாக உள்ள பகுதிகளில் தனித்தனியே ராண்டம் முறையில் நடத்துமுறைகள் அடிப்படைக் கூறுகளுக்கு ஒதுக்கப்படுகின்றன. இங்கு ராண்டம் முறைக்கு ஒரு கட்டுப்பாடு ஏற்பட்டுள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக சமவாய்ப்புக் கட்டுதிட்ட அமைப்பில் நிலம் பிளாக்குகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு பிளாக்கிலும் தனித்தனியே ராண்டம் முறை பயன்படுத்தப்படுகின்றது. இவ்வாறு நமக்குத்தெரிந்த ஒரு செய்தியின் அடிப்படையில் (பிளாக்குகளிடையே வேறுபாடுகள் இருப்பினும் ஒருகுறிப்பிட்ட பிளாக்கு முழுமையும் ஏறத்தாழ ஒரேமாதிரியாக இருக்கின்றது) ராண்டம் முறையை ஒரு கட்டுப்பாட்டுடன் (Restrictions) பயன்படுத்துகிறோம். லட்டீன் சதுர அமைப்புத்திட்டத்தில் ராண்டம் முறைப்படுத்தலுக்கு மேலும் ஒருகட்டுப்பாடு விதிக்கப்படுகின்றது. இவற்றைப் பற்றி அந்தந்தச் செய்முறைத் திட்டங்களைப் பற்றிக் காணும்போது அறியலாம்.

பரிசோதனை முடிவுகளின் புள்ளியியல் பொருள்விளக்கம்

நடத்துமுறைகளின் விளைவுகள் சோதனைக்குச் சோதனை (trial to trial) மாறுபடுகின்றன. ஒரு குறிப்பிட்ட நடத்துமுறையைப் பலதடவைகள் திரும்பப் பயன்படுத்திய பின்பும், புதிதாக மறுபடியும் அதைப் பயன்படுத்தும் பொழுதும் விளைவு என்னவாக இருக்கும் என்று உறுதியுடன் கூறுவது கடினமானதாகும். எனவே, ஒருபரிசோதனையை மறுபடியும் திரும்பச் செய்யும் பொழுது முடிவுகளில் எவ்வளவு மாற்றம் ஏற்படும் என்று நிச்சயமாகக்கூறுவது இயலாததொன்றாகும். இவ்வாறு நடத்துமுறைகளின் விளைவுகளில் மாறுபாடுகள் இருப்பதால் பரிசோதனையின் முடிவுகளில் ஓரளவு திண்ணமிலா நிலை (uncertainty) உள்ளது.

இரு உரங்களின் விளைவுகளைத்தரும் சோதனையொன்றை எடுத்துக்காட்டாகக் காண்போம். அம்மோனியம் சல்பேட், அம்மோனியம் பாசுபேட் என்ற இருவகை உரங்களைப் பயன்படுத்திக் கிடைத்த நெல்லின் விளைச்சல்கள்(கிலோ கிராம்களில் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 5.1 நெல்லின் விளைச்சல்கள்

ரெப்லிகேசன்கள்	அம்மோனியம் சல்பேட்	அம்மோனியம் பாசுபேட்	வேறுபாடு
1	28	26	2
2	32	29	3
3	30	24	6
4	30	32	-2
5	27	26	1
6	34	30	4
7	35	28	7
8	27	30	-3
கூட்டிடை	30.38	28.13	2.25

இனி உரங்களின் விளைவுகளை ஒப்பிடுவதும், விளைவுகளுக்கிடையே யுள்ள வேறுபாட்டினை மதிப்பிடுவதும் பரிசோதனையின் நோக்கங்களாகும். பொதுவாக ஒவ்வொரு பரிசோதனையும் ஒன்று அல்லது இரண்டு நோக்கங்ளுக்காக நடத்தப்படுகின்றது. முதல் நோக்கம் நடத்துமுறைகளிடையே வேறுபாடுகள் உள்ளனவா எனச்சோதிப்பதாகும்; இரண்டாவது, நடத்துமுறைகளிடையே உள்ள வேறுபாடுகளை மதிப்பிடுவதாகும்.

இரு உரங்களின் விளைகவுளின் வேறுபாடுகளின் சராசரி 2.25 கிலோ கிராம். இந்தச் சோதனை இதே நிலைமைகளில் கணக்கற்ற முறைகள் திரும்பச் செய்யப்படுகின்றது எனக் கொள்வோம். அப்பொழுது இரு உரங்களின் விளைவுகளுக்கிடையே யுள்ள வேறுபாடுகளின் சராசரி ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பில் நிலையானதாக அமையும். இம் மதிப்பு இவ்விரு உரங்களுக்கிடையே யுளள உண்மையான வேறுபாடு ஆகும். பரிசோதனையின் முடிவிலிருந்து இவ்வுண்மையான வேறுபாடு 'அனுமானிக்கப்படுகின்றது. ஒரு குறிப்பிட்ட பரிசோதனையின் விவரங்கள் ஒரு மாதிரி (sample) ஆகும். மாதிரி விவரங்களைக் கொண்டு முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றி அனுமானிக்கப்படுகின்றது.

புள்ளியியல் ஊகம்: பரிசோதனையில் கிடைத்த விளைவுகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடுகளைக்கொண்டு உண்மையான வேறுபாடு இதுவெனச் சிறிதும் பிசகாமல் கூற இயலாது. உண்மையான வேறுபாடு இதுவென கூறுவதற்குப் பதிலாக, உண்மையான வேறுபாட்டை உள்ளடக்கிக் கொண்டிருக்க 0.95 நிகழ்திறம் கொண்ட இரு எல்லைகள் கணக்கிடப்படுகின்றன. அதாவது உண்மையான வேறுபாட்டைப் பெரும்பாலும் உள்ளடக்கிக்

கொண்டுள்ள எல்லைகள் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன. நிகழ்திறத்தின் அளவை தேவைக்கேற்றபடி கொண்டு எல்லைகளைக் கணக்கிடலாம். இவ்வெல்லைகள் நம்பிக்கை எல்லைகள் எனப்படுகின்றன. எல்லைகளுக்கிடையே உள்ள இடைவெளி 'நம்பிக்கை இடைவெளி' எனவும், நிகழ்திறம் 'நம்பிக்கை நிகழ்திறம்' எனவும் கூறப்படுகின்றன.

உண்மையான வேறுபாடு இருக்கக்கூடிய இரு எல்லைகளைக் கூறி, அந்த எல்லைகள் உண்மையாக இருப்பதற்கான நிகழ்திறத்திறனையும் கூறும் முறை நடை முறையில் எவ்வாறு பயன் தரக்கூடியதாக இருக்கின்றது என்பதனைக் காணலாம். உரத்தின் விலையைக்கொண்டு பார்க்கும் பொழுது வேறு உரத்தைப் பயன் படுத்துவது, விளைச்சலில் வேறுபாறு 4 கிலோ கிராமிற்கு மேலிருந்தால் இலாபகரமானது என்றும், இல்லை எனில் வேறு உரத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டியதில்லை எனவும் கொள்வோம். பரிசோதனையின்படி உண்மையான வேறுபாடு அமைந்துள்ள எல்லைகள் (4,9) எனில் வேறு உரத்தைப்பயன் படுத்துவது இலாபகரமானது எனக்கொள்ளலாம். எல்லைகள் (—2,3) எனில் வேறு உரத்தைப்பயன்படுத்த வேண்டியதில்லை எனக் கொள்ளலாம். எல்லைகள் (2,6) எனில் ஒரு குறிப்பிட்ட முடிவிற்கு வர இயலாததாக இருக்கின்றது. சரியான முடிவிற்கு வர மேலும் சோதனைகள் செய்யப்படவேண்டும்.

பரிசோதனையில், இரு உரங்களுக்கிடையே உண்மையில் வேறுபாடு இல்லை என்ற எடுகோள் சோதிக்கப்படுகின்றது. இவ்வெடுகோளுக்கும் பரிசோதனையிலிருந்து பெறப்பட்ட விவரங்களுக்கும் உள்ள வேறுபாடு, எடுகோள் உண்மையாக இல்லாததினால் ஏற்பட்டதா அல்லது பரிசோதனைக்குரிய செய்முறைப் பிழைகளினால் ஏற்பட்டதா என்பதைத் தீர்மானிக்க புள்ளியியல் முறையான சிறப்புகாண் சோதனை பயன்படுகின்றது. பரிசோதனை தரும் விவரங்களைக் கொண்டு எடுகோளை ஏற்கத்தகாதென விலக்குவதா வேண்டாமா என்ற முடிவிற்கு வருவதற்கான விதியை சிறப்புகாண் சோதனை தருகின்றது.

(1) உண்மையாக இருக்கும் எடுகோள்கள் மிகவும் குறைந்த தடவைகள் மட்டுமே ஏற்கத்தகாதெனக் தள்ளப்பட வேண்டும். உண்மையான எடுகோளை ஏற்கத்தகாதெனத் தள்ளுவதற்கான நிகழ் திறனை ஆய்வாளர் நிச்சயித்துக் கொள்ளலாம். வழக்கமாக இந்நிகழ் திறத்தின் அளவு 0.05

அல்லது 0.01 எனக் கொள்ளப்படுகின்றது. தவருக எடுகோளை ஏற்கத்தகாதெனத் தள்ளுவது வினைமையுடைய விளைவுகளைக் கொண்டிருப்பின் இன்னும் குறைந்த அளவு (.025, .001 முதலியன) நிகழ்திறத்தினைத் தேர்ந்தெடுக்கும் பொழுது, தவருன எடுகோளைத் தள்ளுவதற்கான வாய்ப்பும் தாளுகவே குறைகின்றது.

(2) பரிசோதனைகளில் தவருன எடுகோள்கள் அதிகமான தடவைகள் ஏற்கத்தகாதெனத் தள்ளப்பட வேண்டும்.

பரிசோதனைகளில் சிறப்புகாண் சோதனைகள் நம்பிக்கை எல்லைகளைவிடக் குறைந்த அளவே பயனுள்ளவைகளாக இருக்கின்றன. ஏனெனில், ஒரு குறிப்பிட்ட நடத்து முறை சிறிதளவேனும் மற்ற நடத்து முறைகளிலிருந்து வேறுபட்டிருக்கும் என்பது வெளிப்படை. அதனுல் நடத்து முறைகளிடையே வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோள் புறவாய்மை வழுவியதாகும் (Unrealistic). ஆகவே, வேறுபாடுகளின் மதிப்பீடுகளைப் பெறுவது சிறந்ததாகும். ஒரு சிறப்புகாண் சோதனையின் பொருள் விளக்கத்திற்கு நம்பிகை எல்லைகளை நிர்ணயிப்பது உதவுகின்றது. சிறப்புகாண் சோதனையின்படி இரு உரங்கள் பொருளுடையவகையில் வேறுபடவில்லை என்ற முடிவு ஏற்படுகின்றது எனக்கொள்வோம். ஆனுல், இந்த முடிவானது இரு உரங்களும் முழுமையும் ஒத்துள்ளன என்பதனைத் தெரிவிக்கவில்லை. உரங்களின் விளைவுகளின் வேறுபாட்டிற்கான நம்பிக்கை எல்லைகள் (—1, 3) எனில், உரங்களின் விளைவுகளின் உண்மையான வேறுபாடு —1-க்கும் 3-க்கும் இடையே இருந்த போதிலும், அது செயல் முறைச்சார்ந்த முக்கியத்துவம் பெற்றதல்ல எனக் கொள்ளலாம். எனவே, செயல் முறைச் சார்ந்த நோக்கங்கள் யாவற்றிற்கும் இரு உரங்களின் விளைவுகள் சமமானவை எனக் கொள்ளலாம். இப்படிக் கூறுவதானது விளைவுகளுக் கிடையேயுள்ள வேறுபாடு புள்ளியியலின்படி பொருளுடையதல்ல என்று கூறுவதைவிட பயனுடையதாய் உள்ளது. எனவே, சிறப்புகாண் சோதனையின் முடிவுடன் நம்பிக்கை எல்லைகளையும் தருவது சிறந்தது.

பிழையின்மையும் திட்டமும் (Accuracy and Precision) ஒரு பொருளின் உண்மையான மதிப்பு 'a' அலகுகள் எனக் கொள்வோம். இப் பொருளின் மதிப்பை அளப்பதில் ஒரு புறச்சாய்வு இருக்கின்றது எனக்கொள்வோம். இப் பொருளின் மதிப்பைப் பல முறைகள் அளக்கும் பொழுது கிடைக்கும் அளவுகள் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு b-யைச் சுற்றி நெருக்கமாக

அமைந்துள்ளன எனக்கொள்வோம். பிழையின்மை என்பது உண்மையான மதிப்பு 'a'யை அளவு (Measurement) அணுகுவதன் நெருக்கத்தைக் குறிக்கின்றது. ஆனால், திட்பம் என்பது அளவானது b–யை அணுகும் நெருக்கத்தைக் குறிக்கின்றது. அதாவது திட்பம் என்பது அளவுகள் திரும்பத் திரும்ப வருவதையே (repeatability) குறிக்கின்றது. எனவே, ஒருபுறச் சாய்வு மிக அதிகமாக இருப்பின் மிக திட்பமான அளவு மிகக் குறைந்த பிழையின்மையைக் கொண்டிருக்கும். ஒரு பரிசோதனையின் ரெப்லிகேசன்கள், கூடுதலான அளவுகள் முதலியன அப் பரிசோதனையின் திட்பத்தை அதிகமாக்குகின்றன. மற்றவைகள் யாவும் சமமாக இருக்கையில், ஒரு பரிசோதனையில் அதிகப்படியான திட்டம் அதிகப்படியான பிழையின்மையாகும். ஆனால். பரிசோதனையில் ஒரு புறச்சாய்வு அதிகமாக இருப்பின் மிக அதிகப்படியான திட்டத்திற்கு ஓரளவு பிழையின்மையே கிடைக்கும். பரிசோதனையில் ஒரு புறச் சாய்வு இல்லை எனக் கொண்டு திட்பமும் பிழையின்மையும் ஒன்றாகவே கருதப்படுகின்றன.

ரெப்லிகேசன்கள் : ரெப்லிகேசன்களில் நடத்துமுறைகள் ராண்டம் முறையில் பயன்படுத்தப்பட்டிருப்பின், இரு நடத்து முறைகளின் சராசரி விளைபயன்களின் (results) வேறுபாட்டுடன் தொடர்புடைய பிழை ரெப்லிகேசன்களின் எண்ணிக்கையை அதிகரிக்கும் பொழுது குறைகின்றது. ஏனெனில், ரெப்லிகேசன்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும் பொழுது நடத்து முறைகளைப் பாதிக்கும் பிழைகள் ஒன்றையொன்று நீக்கிக் கொள்ளுகின்றன (cancel). குறிப்பிட்ட திட்பத்தைப் பெற எவ்வளவு ரெப்லிகேசன்கள் ஒரு பரிசோதனைக்கு வேண்டியிருக்கும் என்பதனைக் காக்ரனும் காக்சும் விரிவாகத் தங்கள் நூலில் கூறியுள்ளனர்.

மாறுபாடுகள் எல்லாப் பரிசோதனைகளிலும் இருப்பதால், ரெப்லிகேசன்கள் பெரும்பாலும் எல்லாப் பரிசோதனைகளிலும் இருக்கவேண்டும். செம்முறைப் பிழையின் வாத ஆதாரமுடைய (Valid) மதிப்பீட்டைப்பெற ரெப்லிகேசன்களும், ராண்டம் முறைப்படுத்தலும் ஒவ்வொரு பரிசோதனையிலும் இருக்கவேண்டும். ஒரே அடிப்படைக்கூறில் ஒரு நடத்துமுறையைப் பல தடவைகள் பயன்படுத்தி முடிவுகளைப் பெறுவது ரெப்லிகேசன்கள் ஆகமாட்டா. ஏனெனில், அந்த நடத்துமுறை எல்லா நிலைமைகளிலும் பரிசோதிக்கபடுவதில்லை. மேலும், இம்முறை அடிப்படைக் கூறுக்கும் அடிப்படைக் கூறுக்

கும் உள்ள வேறுபாட்டைக் குறைக்கப் பயன்படுவதில்லை. எனவே, ரெப்லிகேசன்கள், அடிப்படைக்கூறுகளுக்கிடையே யுள்ள வேறுபாடுகளைக் குறைத்து, செய்முறைப்பிழை மிகக் குறைந்த அளவு இருக்குமாறு செய்யத்தக்க அளவில் இருக்க வேண்டும் ஒரு பரிசோதனையில் எவ்வளவு ரெப்லிகேசன்கள் வேண்டும் என்பதைக் கீழ்க்கண்டவைகள் நிர்ணயிக்கின்றன.

(i) விரும்பப்படும் திட்பத்தின் அளவு.

(ii) செய்முறைச் சாதனத்திலுள்ள மாறுபாட்டின் அளவு.

(iii) செய்முறைச் சாதனத்தின் அளவு,வடிவம் முதலியன.

(iv) பரிசோதனையை நடத்த கிடைக்கக்கூடிய பொருட் சாதனங்கள்.

பரிசோதனையின் திட்பத்தையும், பிழையின்மையையும் அதிகரிக்கப் பயன்படும் முறைகள்:

(1) பரிசோதனையின் உருவளவை (Size) அதிகரிப்பதன் மூலம் பிழையின்மையை அதிகரிக்கலாம். உருவளவு அதிக மாகும் பொழுது செய்முறைச் சாதனம் ஒரே மாதிரியாக இல்லாமல் போகலாம். பரிசோதனையை மேற்பார்வையிடும் தரம் குறைந்து அதனால் ஒருபுறச் சாய்வுடைய முடிவுகளைப் பரி சோதனை தரலாம். ஆயினும், பொதுவாகப் பரிசோதனையின் உருவளவு அதிகரிக்கும்பொழுது மதிப்பீட்டின் பிழையின்மை யும் அதிகரிக்கின்றது. உருவளவு அதிகமாகும் பொழுது செய் முறைப் பிழையை மதிப்பிட அதிக வரையற்ற பாகைகள் இருக்கின்றன.

(2) பரிசோதனை செய்முறைத் திறத்தை (Technique) செம்மைப் படுத்துவதன் மூலம் பிழையின்மையை அதிகரிக்கச் செய்யலாம்.

(a) செய்முறை அடிப்படைக் கூறுகளுக்கு நடத்து முறை களை ஒரே சீரான முறையில் பயன்படுத்த வேண்டும். எடுத்துக் காட்டாக, தீவனங்கள் நடத்து முறைகளாகக் கொண்ட சோதனையில், ஒவ்வொரு பசுவிற்கும் தரப்படும் தீவனத்தின் அளவு ஒரே சீரானதாக இருக்க வேண்டும். அதற்குத் தகுந்த கருவியைப் பயன்படுத்துவது சிறப்பானது.

(b) ஒவ்வொரு நடத்து முறையும் முடிந்த அளவு ஒரே விதமான நிலைமைகளில் விளைவுகளை ஏற்படுத்த புறவியல் செயல் விளைவுகளைக் கட்டுப்படுத்த வேண்டும்.

(c) நடத்து முறைகளின் விளைவுகளை அளக்கப் பிறழ்ச்சியற்ற அளவு முறைகளை ஏற்படுத்த வேண்டும்.

(d) விவரங்களைப் பதிவு செய்வதிலும், ஆய்வு செய்வதிலும் ஏற்படும் பிழைகளை நீக்க முடிந்த அளவு தணிக்கைகள் (checks) இருக்க வேண்டும்.

(3) பரிசோதனைக்குப் பொருந்திய செய்முறைச் சாதனத்தைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். செலவழிக்கப்படும் உழைப்பிற்கும் காலத்திற்கும் மிகுந்த அளவு பிழையின்மையைத் தரவல்லதாக அடிப்படைக் கூறின் உருவளவும் வடிவமும் இருக்க வேண்டும்.

(4) பரிசோதனை முடிவுகளை நன்கு புரிந்து கொள்ளத் துணை அளவுகளைப் பரிசோதனை நடக்கும் பொழுது எடுக்கலாம். இது பற்றிய விவரங்களை உடன் மாறுபாடு பகுதியில் காணலாம்

(5) தகுந்த பரிசோதனைத் திட்டத்தைத் தேர்ந்தெடுப்பது மிக முக்கியமானதாகும். மிகுந்த அளவு நடத்து முறைகள் இருக்கும் பொழுதும் தகுந்த பரிசோதனைத் திட்டத்தைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். இடை விளைவுகள் முக்கியமானதாகக் கருதப்பட்டால், பகுதித்திருப்பச் சோதனைகள் இடை விளைவுகளைக் கணக்கிடப் பயன்படுகின்றன.

பிழையின்மையை அதிகரிப்பதற்கான முறைகளைக் காக்ரனும் காக்சும், 'செய்முறைத் திட்டங்கள்' என்ற தங்கள் நூலில் விரிவாகத் தந்துள்ளனர்.

இது காறும் கூறியவற்றின் அடிப்படையில், செய்முறைத் திட்டங்களின் அடிப்படைக் கொள்கைகளாகப் பின் வருவனவற்றைக் கூறலாம்:

(1) பரிசோதனை ஒருபுறச் சாய்வு கொண்டிருக்கக்கூடாது. அளக்க விரும்பும் மதிப்புகளின் பிறழ்ச்சியற்ற (unbiased) மதிப்பீடுகளைத் தருமாறு பரிசோதனையைத் திட்டமிட வேண்டும். ஆய்வாளரின் உணர்வு நிலையுடைய ஒருபுறச் சாய்வு (conscious bias) மட்டுமன்றி, ஆய்வாளர் அறியாமலேயே ஏற்படக்கூடிய ஒருபுறச் சாய்வுகளும் பரிசோதனையில் வராதவாறு பார்த்துக் கொள்ள வேண்டும். இதற்கான சிறந்த முறை ராண்டம் முறைப்படுத்துதல் எனக் கண்டோம்.

(2) செய்முறைப் பிழையின் அளவு இருக்க வேண்டும். பல நடத்து முறைகளின் விளைவுகளை நோக்கும் பொழுது அவை ஒன்றிலிருந்து ஒன்று முற்றிலும் மாறுபட்டிருப்பதாகத் தோன்றும். இது முற்றிலும் தனிப்பட்ட எண்ணமாகும் (subjective opinion). ஆனால், பரிசோதனை முடிவு தனிப்பட்ட எண்ணமாக இல்லாமல் மனத்திற்குப் புறம்பானதாக இருக்க வேண்டும். பரிசோதனையே பிழையின் அளவைத் தர வல்லதாக இருக்க வேண்டும்; இந்தப் பிழையே நடத்து முறைகளின் முக்கியத்துவத்தை அளக்கும் கருவியாக இருக்க வேண்டும்.

(3) பரிசோதனைக்கு நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட நோக்கம் இருக்க வேண்டும். பல பரிசோதனைகள் தெளிவான நோக்கமின்றி திட்டமிடப்படுகின்றன. இந்த நடத்து முறைகளையெல்லாம் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவேண்டும் எனக் கொள்வது மட்டும் போதாது. அந்த நடத்து முறைகளை ஒப்பிடத் தேர்ந்தெடுப்பதற்குத் தகுந்த காரணம் இருக்க வேண்டும். பரிசோதனை முடிவுகள் எவற்றிற்குப் பொருந்தும்? எந்த நிலைமைகளில் பொருந்தும்? முடிவுகள் நடைமுறை உபயோகத்திற்கு உடனடியாகப் பயன்படப் போகின்றனவா அல்லது நல்ல முறையில் போதிய அளவு புரிந்திராத ஊகக் கோட்பாட்டின் (theory) பகுதிகளை விளக்கப் பயன்படப் போகின்றனவா? நாம் விரும்புவது மதிப்பீடுகளையா அல்லது சிறப்பு காண் சோதனையையா? இந்த கேள்விகளுக்குரிய பதில்கள் தெரிந்திருந்தால்தான் பரிசோதனைக்குரிய சூனிய எடுகோளை அமைக்க முடியும்.

(4) பரிசோதனையின் நோக்கத்தை நிறைவேற்றும் அளவு பரிசோதனை பிழையின்மையைக் கொண்டிருக்க வேண்டும். பிழையின்மையை அதிகரிப்பதற்கான வழி முறைகளைச் சிறிது முன்பு கண்டோம்.

(5) பரிசோதனை போதிய அளவு செயற் பரப்பு (Scope) கொண்டிருக்க வேண்டும். நமது நோக்கம் என்ன என்பதைக் கொண்டு செயற் பரப்பின் அளவை நிர்ணயிக்கலாம். இரு உரங்களை இரண்டிரண்டு, மட்டங்களில் ஒரே சோதனையில் பயன்படுத்துவதால் உரங்களின் விளைவுகளை அறிவதோடு உரங்களுக்கிடையேயுள்ள இடை விளைவையும் அறிகிறோம். இவ்வாறு பகுதித் திருப்பச் சோதனையில் பரிசோதனையின் செயற் பரப்பு அதிகமாகின்றது.

6. பரிசோதனையில் மேற்கொள்ளும் தற்கோள்கள்

பல்வேறுபட்ட பரிசோதனைத் திட்டங்களைக் காணு முன்பு பரவற்படி ஆய்வில் மேற்கொள்ளப்படும் தற்கோள்களையும், தற்கோள்கள் பரிசோதனைக்கு எவ்வாறு பொருந்துகின்றன என்பதனையும், பொருந்தாதபோது ஏற்படும் விளைவுகளையும், தற்கோள்களுக்கும் பொருந்தாத விவரங்களை ஆயும் முறைகளையும் காண்போம்.

வழக்கமாக, பரவற்படி ஆய்வில் மேற்கொள்ளப்படும் தற்கோள்கள் நான்கு. அவை :

1. வேறுபட்ட பல விளைவுகளும் (நடத்துமுறை விளைவுகள், பிளாக் விளைவுகள் முதலியன) செய்முறைப் பிழையும் கூட்டப்படக்கூடியவை (additive).

2. பிழைகள் ஒன்றையொன்று சாராது தொடர்பற்று இருக்கின்றன.

3. பயன்படுத்தப்பட்ட நடத்துமுறைகள் எவையாயினும் அடிப்படைக் கூறுகளில் உள்ள பிழைகளின் மாறுபாடு ஒருபடித்தானதாக இருக்கின்றது.

4. பிழைகள் இயல்நிலையில் பரவியுள்ளன.

முதல் தற்கோளைப்பற்றிப் பார்ப்போம். விளைவுகள் கூட்டப்படும் தன்மையைக் கொண்டிரா விடில் பரவற்படி ஆய்வில் அந்த விளைவுகளுக்கான வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைகள் என குறிப்பிடப்படுபவை உண்மையான விளைவுகளுக்கானவை அல்ல. கூட்டப்படக் கூடியனவாக இல்லாத விளைவுகள்

உண்மையில் பெருக்கப்படக்கூடியனவாக இருப்பதால், மூல விவரங்களுக்கு மடக்கைகளைப் (logrithms) பயன்படுத்தினால் கூட்டப்படக்கூடிய விளைவுகளாக மாற்றம் அடைகின்றன. மற்ற வகை கூட்டப்படக்கூடியனவாக இல்லாதவற்றிற்கு வேறு வகை உருவ மாற்றங்கள் (transformation) பயன்படலாம். பெருக்கப் படக்கூடிய விளைவுகளைத் தவிர மற்றவற்றில் உண்மையான தொடர்பினை ஏறத்தாழ சரியாகக் காட்டுவது கூட்டப்படக் கூடியது என்பதாகும். பொதுவாக நடத்துமுறை விளைவுகளும் பிளாக்கு விளைவுகளும் சிறிதாக இருந்தால் (எடுத்துக்காட்டாக, மிகப் பெரிய கூட்டிடையானது மிகச்சிறிய கூட்டிடையை விட ஐம்பது சதவீதத்திற்குமேல் பெரிதாக இல்லாமல் இருந்தால்) கூட்டப்படக் கூடியனவா இல்லையா என்பதைப் பற்றிக் கவலைப்பட வேண்டியதில்லை. ஆனால், நடத்துமுறை விளைவுகளாவது பிளாக்கு விளைவுகளாவது பெரிதாக இருக்கும் பொழுது கூட்டப்படக்கூடியது எனக் கொள்வதில் எச்சரிக்கை வேண்டும்.

இனி பரிசோதனைப் பிழைகள் ஒன்றையொன்று சாராது தொடர்பற்றிருக்க வேண்டும் என்ற தற்கோளைக்காண்போம். பரிசோதனைகளில் அடுத்தடுத்துள்ள அடிப்படைக் கூறுகளில் உள்ள பிழைகள் வழக்கமாக நேர்முகத்தொடர்புடையனவாய் இருக்கின்றன எனத் தெரிகின்றது. ராண்டம் முறைப் படுத்துதல் எவ்வாறு இவ்விடர்பாட்டிலிருந்து விடுபட உதவுகின்றது என்பதை முன்பே கண்டோம்.

மூன்றாவதாகப் பரிசோதனை அடிப்படைக் கூறுகளில் உள்ள பிழைகளின் மாறுபாடுகள் ஒருபடித்தானவையாக இருக்கின்றன என்ற எடுகோளைக் காண்போம். சில சமயங்களில் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நடத்துமுறைகளில் பிழை மாறுபாடுகள் மீதியுள்ளவற்றில் உள்ள பிழை மாறுபாடுகளினின்றும் வேறுபட்டிருக்கின்றன. அவ்வாறு இருப்பினும் பிழைகள் இயல்நிலையில் இல்லை என்று சந்தேகிக்க இடமில்லை. பிழை மாறுபாடுகள் இவ்வாறு ஒரு படித்தானவையாக இல்லாதபொழுது F-சோதனை அளவிற்கு அதிகமான பொருளுடைய முடிவுகளைத் தரும். ஒவ்வொரு நடத்துமுறையும் சமமான எண்ணிக்கையில் ரெப்ளிகேசன்களைக் கொண்டிருந்தால், இத் தொல்லை மிதமானதாக இருக்கும். ஆனால், நடத்துமுறை கூட்டிடைகளை இரண்டிரண்டாக எடுத்து ஒப்பிடுவது இதனால் மிகவும் பாதிக்கப்படுகின்றது. ஏனெனில், பிழை மாறுபாடுகள் ஒரு படித்தானவையாக இல்லாதது தரப்பிழையைப் பாதிக்கின்றது. மற்ற நடத்து

முறைகளின் கூட்டிடைகளிலிருந்து கணிசமான அளவில் வேறு பட்ட கூட்டிடைகளைக் கொண்ட சில நடத்துமுறைகளினால் இத் தொந்தரவு ஏற்பட்டிருப்பின், அந்த நடத்துமுறைகளை முக்கிய ஆய்விலிருந்து நீக்கி விடுவதே தகுந்த தீர்வு ஆகும். ஏனெனில், அந்த நடத்து முறைகளைப் பற்றிய முடிவுகளை விவரங்களைச் சோதிக்கும் பொழுதே அறியலாம். சில சமயங்களில் ஒவ் வொன்றும் ஒரே மாதிரியான பிழை மாறுபாடுகளைக் கொண்ட தாகப் பல பகுதிகளுக்கிடையே பிழைமாறுபாடுகளின்உருவளவு கள் (sizes) வேறுபட்டிருக்க, ஒவ்வொரு பகுதியிலும் பிழை மாறு பாடுகள் ஒரு படித்தானவையாக இருக்கின்றன. பிழை மாறு பாடுகள் ஒரு படித்தானவையாக இல்லாதபோது, விவரங் களுக்கு உருவமாற்றம் (tranformation) செய்வதால் பிழைகள் ஒரு நிலைப்படுகின்றன.

இனி, பிழைகள் இயல் நிலையில் பரவியுள்ளன என்ற எடு கோளைக் காண்போம். பிழைகள் இயல்நிலையில் இல்லாமல் இருந்தால், அதாவது பிழைகளின் பரவல் கோட்டமாக (skewed) இருந்தால் F, t சோதனைகள் அளவிற்கு அதிகமான பொருள் உள்ள முடிவுகளைத் தருகின்றன. இத்துடன் ஆய்வின் பயில் திறனும் (efficiency) குறைகின்றது. ஏனெனில், பிழைகள் இயல் நிலையில் இல்லாமல் இருந்தால், பொதுவாக ஒரு நடத்து முறையின் மதிப்புகளின் கூட்டிடை அந்த நடத்துமுறைக்கு ஏற்புடைய முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டிடையின் பிழையற்ற மதிப்பீடாக (accurate estimate) இருப்பதில்லை. விவரங்களின் நிலையான கூறுகளின் (fixed factors) விளைவுகள் அளவானதாக இருந்தால் இயல்நிலையில்லாமை (non-normality) முடிவுகளை மிக வும் அதிகமாகப் பாதிப்பதில்லை.

உருவ மாற்றங்கள் : இயல்நிலையில் இல்லாத பரவல் களின் ஒரு பண்பு (feature) மாறுபாடு கூட்டிடையின் தொடர் புடையதாக இருப்பதாகும். பாய்சான் (Poisson) பரவலில் மாறுபாடு கூட்டிடைக்குச் சமமாக இருக்கிறது. ஈருறுப்புப் பர வலில் p கூட்டிடை எனில், $p(1-p)/n$ மாறுபாடு ஆகும். இவ் வாறு நடத்துமுறை அல்லது ரெப்லிகேசன் விளைவுகள் பெரி தானவைகளாக இருப்பின், மாறுபாடுகள் சமமில்லாதவை களாக இருக்குமென எதிர்பார்க்கப்படுகின்றது.

எண்ணிக்கைகளுக்கு (Counts) வர்க்க மூல உருவ மாற்றம் : அரிதான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கைகள் பாய்சான் பரவலில் அமைந்துள்ளன. பூச்சிகளின் (insects)

செறிவு மிகவும் குறைவாக இருக்கும் நிலத்தில் 900 ச.செ.மீ.க்கு எவ்வளவு பூச்சிகள் உள்ளன என்பதைக் கணக்கெடுப்பதாகக் கொள்வோம். எண்ணிக்கைகளில் பல பூச்சியங்களாக இருக்கலாம். மிகப் பெரிய எண்ணிக்கை பத்திற்கு அருகிலான எண்ணாக இருக்கலாம். இந்த மாதிரியான சமயங்களிலும், பாய்சான் பரவலாக இருக்கும் பொழுதும் மிகவும் தகுந்த உருவ மாற்றம் மாறியின் வர்க்க மூலம் ஆகும். மாறி X எனில் $\sqrt{X}$-க்கு உருவ மாற்றம் செய்ய வேண்டும். சில எண்ணிக்கைகள் மிகச் சிறியனவாகவோ பூச்சியங்களாகவோ இருந்தால் தகுந்த உருவ மாற்றம் $\sqrt{X+1}$ அல்லது $\sqrt{X}+\sqrt{X+1}$.

A, B, C, D, E என்ற ஐந்து வகை நடத்து முறைகளைப் பயன்படுத்திய பின்பு நிலத்தில் உள்ள பூச்சிகளின் எண்ணிக்கை லட்டின் சதுர அமைப்பில் தரப்பட்டுள்ளது. எண்ணிக்கைகளில் சில பூச்சியங்களாக இருப்பதால் $\sqrt{X+1}$-க்கு உருவ மாற்றம் செய்யப்பட்டு ஆய்வு நடத்தப்படுகிறது.

அட்டவணை 6.1

உருவமாற்ற ஆய்வு அட்டவணை

A 4	*C* 1	*D* 3	*B* 0	*E* 1
D 0	*B* 1	*E* 0	*C* 1	*A* 3
E 2	*A* 10	*B* 0	*D* 2	*C* 0
C 1	*D* 0	*A* 5	*E* 1	*B* 0
B 0	*E* 2	*C* 0	*A* 7	*D* 1

$\sqrt{X+1}$-க்கு உருவ மாற்றம் செய்யப்பட்டு மதிப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 6.2

உருவமாற்ற ஆய்வு அட்டவணை

	1	2	3	4	5	மொத்தம்
1	2.2	1.4	2.0	1.0	1.4	8.0
2	1.0	1.4	1.0	1.4	2.0	6.8
வரிசைகள் 3	1.7	3.3	1.0	1.7	1.0	8·7
4	1.4	1.0	2.4	1.4	1.0	7.2
5	1.0	1·7	1.0	2.8	1.4	7.9
மொத்தம்	7.3	8.8	7.4	8.3	6.8	38.6

அட்டவணை 6.3

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு 5%	1%
நிரல்	4	0.52	0·13	1.00	3.26	5·41
வரிசை	4	0.44	0.11	0.85		
நடத்து முறை	4	6.63	1.66	12·77		
பிழை	12	1.53	0.13			
மொத்தம்	24	9.12				

மாறுபாடு கூட்டிடைக்கு விகித சமத்தில் இருக்குமாறு உள்ள எண்ணிக்கைகளுக்கும் வர்க்க மூல உருவ மாற்றத்தைப் பயன் படுத்தலாம். அதாவது $\sigma x^2 = C\bar{x}$ ஆக இருக்கும்போது பயன் படுத்தலாம். பாய்சான் பரவலுக்கு C-ன் மதிப்பு ஒன்று,

ஆனால், C-ன் மதிப்பு ஒன்றைவிட அதிகமாக இருக்கும் விவரங்கள் அடிக்கடி அமைகின்றன.

சதவீதங்கள், விகித சமங்கள் ஆகியவற்றிற்கான உருவ மாற்றங்கள்

சதவீதங்கள் இயல் நிலைப் பரவலில் இருந்து வேறுபட்டிருக்கச் சாத்தியக் கூறுகள் உள்ளன. உண்மையில் சதவீதங்களின் பரவல் ஈருறுப்புப் பரவல் ஆகும். p–ன் மதிப்பு q–ன் மதிப்பிற்குச் சமம் இல்லை எனில், பரவல் கோட்டமாக (skewed) இருக்கும். p-ன்மதிப்பு q-க்குச் சமமாகவோ அல்லது ஏறக்குறைய சமமாகவோ இருந்தால், பரவல் இயல் நிலை எனக் கொள்ளுமளவு சீராக இருக்கின்றது. எல்லா விவரங்களும் 30%லிருந்து 70%க்குள் இல்லையெனில் சதவீதங்களுக்கு உருவ மாற்றத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும். p என்பது உருவ மாற்றம் செய்யப்பட வேண்டிய சதவீதம் எனில், $\sin^{-1}\sqrt{p}$ தகுந்த உருவ மாற்றத்தைத் தருகின்றது. இது நேர்மாறு நெடுக்கை உருவ மாற்றம் (Inverse sine or Arcsin transformation) என வழங்கப்படுகின்றது. இந்த உருவ மாற்றத்திற்குப் பயன்படும் அட்டவணையை சி.ஐ.ப்ளிஸ் (C.I.Bliss) என்பவர் தயாரித்துள்ளார். கீழே தரப்பட்டுள்ள பரிசோதனையின் விவரங்கள் சதவீதங்கள். எனவே, தரப்பட்ட விவரங்களுக்கு உருவ மாற்றம் செய்யப்பட்டு, கணக்கீடுகள் செய்யப்பட்டு, பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 6.4

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

பிளாக்குகள்	நடத்து முறைகள்				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
I	10.9	12.0	36.5	27.4	12.1
II	17.4	19.6	25.3	50.1	19.6
III	9.2	14.1	11.4	10.8	28.7
IV	6.5	13.2	8.4	35.6	14.6
V	8 6	20.7	9.8	15.6	30.2
VI	6.3	20.5	14.6	32.3	18.4

அட்டவணை 6.5

விவரங்களுக்கான நேர்மாறு நெடுக்கை உருவமாற்றம்

பிளாக்குகள்	நடத்து முறைகள் A	B	C	D	E	மொத்தம்
I	19.23	20.27	35.17	31.56	20.36	126.64
II	24.65	26.28	30.20	45.06	26.28	152.47
III	17.66	22.06	19.73	19.19	32.39	111.03
IV	14.77	21.30	16.85	36.63	22.46	112.01
V	17.05	27.06	18 24	23.26	33.34	118.95
VI	14.54	26.92	22.46	34.63	25.40	123.95
மொத்தம்	107.95	143.89	142.65	190.33	160.23	745.05

அட்டவணை 6.6

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு
நடத்து முறை	4	597.63	149.41	4.10
பிளாக்கு	5	230.96	46.19	1.27
பிழை	20	729.41	36.49	
மொத்தம்	29	1558.41		

விசாலமான வீச்சைக் கொண்ட முழு எண்களால் ஆன எண்ணிக்கைகளுக்கான உருமாற்றம் :

நிலத்தில் புழுபூச்சிகளின் செறிவு அதிகமாக இருந்தால் குறிப்பிட்ட அளவு பரப்புகள் சிலவற்றில் புழுபூச்சிகளின்

எண்ணிக்கை மிக அதிகமாக இருக்கலாம். புழுபூச்சிகளைக் கொல்லுவதற்காக நிலத்திற்குப் பலவகை பூச்சி கொல்லி மருந்துகளைப் பயன்படுத்துவதாகக் கொள்வோம். சிறந்த பூச்சி கொல்லி பயன்படுத்தப்பட்ட இடத்தில் பூச்சிகளின் எண்ணிக்கை 5-லிருந்து 20 வரை இருக்கலாம். மருந்து சரியில்லாத இடங்களில் எண்ணிக்கைகள் 100-லிருந்து ஆயிரக்கணக்கில் இருக்கலாம். இதற்குத் தகுந்த உருவமாற்றம் எண்ணிக்கைகளுக்கு மடக்கை (logrithm) எடுப்பதாகும். சில எண்ணிக்கைகள் பூச்சியங்களாக இருப்பின், உருவ மாற்றம் $\log(x+1)$.

மாறுபாடுகள் ஒருபடித்தானவையாக இருக்கின்றனவா என்பதைச் சோதிக்கும் முறை.

பரவற்படி ஆய்வில் மாறுபாடுகள் ஒரு படித்தானவையாக இருக்கின்றன எனக் கொள்ளப்படுவதால், தரப்பட்டுள்ள விவரங்களில் மாறுபாடுகள் ஒருபடித்தானவையாக இருக்கின்றனவா என்பதைச் சோதித்தறியும் முறையை அறிந்து கொள்வது நல்லது.

ஒரு பரிசோதனையில் m பிரிவுகளும், ஒவ்வொரு பிரிவிலும் n மதிப்புகளும் இருப்பதாகக் கொள்வோம். இந்த m பிரிவுகளிலிருந்து பெறப்படும் மாறுபாடுகளை $s_1^2, s_2^2, \ldots s_i^2 \ldots s_m^2$ எனக் கொள்வோம். சோதனைக்குப் பயன்படும் இரு அளவுகளான M-ம் A-ம் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன.

$$M=(\log_e 10)(n-1)\left\{m \log\left(\frac{\sum s_i^2}{m}\right)-\sum_i \log s_i^2\right\}$$

இதில் $\log_e 10 = 2.3026$

$$A = 1 + \frac{m+1}{3m(n-1)}$$

ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை வெவ்வேறாக $n_1, n_2 \ldots n_m$ என இருந்தால்,

$$M = (\log_e 10)\left[\left\{\sum (n_i-1)\right\} \log \left\{\frac{\sum (n_i-1)s_i^2}{\sum (n_i-1)}\right\} - \sum (n_i-1) \log s_i^2\right]$$

$$A = 1 + \frac{1}{3(m-1)}\left[\sum_i \frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{\sum n_i - 1}\right]$$

— ஒவ்வொரு s_i^2-ம் ஒரே மாறுபாடு σ^2-ன் மதிப்பீடு என்ற எடுகோளின் கீழ்,

M/A என்ற விகிதம் $(m-1)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2 ஆகப் பரவியுள்ளது.

இனி, ஒரு வழிப்பாகுபாடு எடுத்துக்காட்டு II-ல் தரப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கான மாறுபாடுகள் ஒருபடித்தானவையாக இருக்கின்றனவா எனச் சோதனை செய்யலாம்.

முதலில் மாறுபாடுகளின் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

அட்டவணை 6.7 மாதிரிகள்

	A	B	C	D	E
	72	71	64	54	65
	75	76	66	61	63
	68	64	73	67	73
	81	72	68	55	59
	76	73	51	70	61
	58	53	67	51	51
$\sum x$	430	409	389	358	372
$\sum x^2$	31134	28235	25495	21652	23326
$\frac{(\sum x)^2}{n}$	30816.67	27880.17	25220.17	21360.67	23064.00
$\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}$	317.33	354.83	274.83	291.33	262.00
$s_i^2 = \frac{\sum x^2 - (\sum x)^2/n}{n-1}$	63.47	70.97	54.97	58 27	52.40

அட்டவணை 6.8.

M-ன் மதிப்பு

	s_i^2	$\log s_i^2$
	63 . 47	1 . 8026
	70 . 97	1 . 8510
	54 . 97	1 . 7402
	58 . 27	1 . 7654
	52 . 40	1 . 7193
மொத்தம்	300 . 08	8 . 8785

$$\frac{\sum s_i^2}{m} = 60.02 \quad \log\left(\frac{\sum s_i^2}{m}\right) = 1.7783$$

இனி M-ன் மதிப்பைக் காண,

$$M = (\log_e 10)\ (n-1)\left\{ m\log\left(\frac{\sum s_i^2}{m}\right) - \sum_i \log s_i^2\right\}$$

$$= 2.3026 \times 5\ (5 \times 1\ 7783 - 8.8785)$$

$$= 0{\cdot}15$$

$$A = 1 + \frac{m+1}{3\,m\,(n-1)}$$

$$= 1 + \frac{5+1}{3 \times 5\ (6-1)}$$

$$= 1 + .08 = 1.08$$

$$M/A = \frac{0.15}{1.08} = 0.14$$

வரையற்ற பாகைகள் 4 கொண்ட 5% χ^2 மதிப்பு =9.49

$$M/A = 0.14 > \chi^2_{.05, 4} = 9.49$$

எனவே, மாறுபாடுகள் ஒரு படித்தானவையாக இருக்கின்றன என்ற எடுகோள் ஏற்கப்படுகின்றது.

இனி ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை வெவ்வேருக இருந்தால் சோதனை செய்வதற்கான எடுத்துக்காட்டு ஒன்று காண்போம். ஒரு வழிப் பாகுபாட்டில் தரப்பட்டுள்ள முதல் எடுத்துக்காட்டினைச் சோதனை செய்வோம்.

அட்டவணை 6.9

ஒரு வழிப் பாகுபாட்டிற்கான சோதனை

மாதிரிகள்

	A	B	C	D
	64	46	65	76
	74	57	51	60
	66	45	70	55
	54	65	54	72
	79	58		80
	76			70
	70			57
				73
				78
$\sum x$	483	271	240	621
$\sum x^2$	33761	14979	14642	43549
$\frac{(\sum x)^2}{n}$	33327	14688.20	14400	42849
$\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} = (n_i - 1)s_i^2$	434.00	290.80	242.00	698.00

அட்டவணை 6.10

ஒரு வழிப்பாகுபாட்டிற்கான சோதனை

$(n_i-1)\ s_i^2$	n_i-1	s_i^2	$\log s_i^2$	$(n_i-1) \log s_i^2$	$\frac{1}{n_i-1}$
434.00	6	72.33	1.8593	11.1558	0.1667
290.80	4	72.70	1.8615	7.4460	0.2500
242.00	3	80.67	1.9067	5.7201	0.3333
698.40	8	87.25	1.9407	15.5256	0.1250
1664.80	21			39.8475	0.8750

$$M = (\log_e 10) \left[\{ \Sigma(n_i-1)\} \log \left\{ \frac{\sum (n_i-1)\, si^2}{\sum (n_i-1)} \right\} - (n_i-1) \log si^2 \right]$$

$$= 2.3026 \left[21 \log \frac{1164.80}{21} - 39.8475\right]$$

$$= 2.3026\, [39.8811 - 39.8475]$$

$$= 0.08$$

$$A = 1 + \frac{1}{3\,(m-1)} \left[\sum_i \frac{1}{ni-1} - \frac{1}{\sum ni-1} \right]$$

$$= 1 + \frac{1}{3 \times 3}\, [0.8720 - 0.0476]$$

$$= 1 + 0.09$$

$$= 1.09$$

$$M/A = \frac{0.08}{1.09} = 0.07$$

$$\chi^2_{.05, 3} = 7.81$$

$$M/A = 0.07 < \chi^2_{.05, 3} = 7.81$$

ஆகவே, மாறுபாடுகள் ஒரு படித்தானவையாக இருக்கின்றன என்ற எடுகோள் ஒப்புக் கொள்ளப்படுகின்றது.

7. செய்முறைத் திட்டங்கள்

1. முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டம்
(Completely Randomised Design)

முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டம் அடிப்படைத் திட்ட மாகும். மற்ற சமவாய்ப்புத் திட்டங்கள் யாவும் இத் திட்டத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு ஏற்பட்டவைகளே. முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டத்தைப் பரிசோதனைக் கூறு (experimental material) முழுமையும் நடத்து முறைகளைச் சரிசம வாய்ப்பு முறையில் சீராக அமைக்கும் திட்டம் என வரையறுக் கலாம். பரிசோதனைக் கூறின் ஒரு பகுதிக்கு மட்டும் நடத்து முறைகள் இருப்பதற்கான முயற்சிகள் ஏதுமில்லாமல், எல்லாப் பகுதிகளும் நடத்து முறைகளைப் பெற சரிசம வாய்ப்பு அளிக்கப் படுகின்றது. எடுத்துக் காட்டாக, A, B, C, D என்ற நான்கு நடத்து முறைகள், ஐந்தைந்தாக நான்கு பிரிவுகளில் உள்ள இருபது அடிப்படைக் கூறுகளில் (experimental units) பயன் படுத்தப்பட வேண்டும் எனக் கொண்டால், இவ்விருபது அடிப் படைக் கூறுகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு குறிப்பிட்ட நடத்து முறை யினைப் பெற சமமான நிகழ் திறத்தைப் பெற்றுள்ளன. நடத்து முறைகள் திரும்பப் பயன் படுத்தப்படும் எண்ணிக்கைகள் மாறு படலாம். இருபது அடிப்படைக் கூறுகளில் A நான்கு தடவை களும், B ஐந்து தடவைகளும், C ஐந்து தடவைகளும், D ஆறு தடவைகளும் என திரும்பப் பயன் படுத்தப்படலாம். இத் திட்டம் பரிசோதனைக் கூறு முழுமையும் ஒரு படித்தானதாக இருக்கும் பொழுது வழக்கமாகப் பயன் படுத்தப்படுகின்றது. அதாவது, பரிசோதனைக் கூறு முழுமையும் உள்ள மாறுபாடு (variation) மிகக் குறைவாக இருக்கும் பொழுது இத் திட்டத் தைப் பயன் படுத்துவது சிறந்தது. பரிசோதனைக் கூறில் மாறு பாடு இருக்கும் பொழுது, மாறுபாட்டைக் கட்டுப் படுத்தித்

திட்பமான முடிவுகளைத் தரவல்ல வேறு திட்டங்கள் உள்ளன. இனி இத் திட்டம் எவ்வாறு அமைக்கப்படுகின்றது என்பதனைக் காணலாம்.

திட்டத்தின் அமைப்பு: இத்திட்டத்தின்படி, அடிப்படைக் கூறுகளில் பரிசோதனை நடத்து முறைகள் சமவாய்ப்பு முறையில் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. 30 அடிப்படைக் கூறுகளில் A, B, C, D, E, F என்ற ஆறு நடத்து முறைகள் ஒவ்வொன்றும் ஐந்தைந்து தடவைகள் சமவாய்ப்பு முறையில் பயன்படுத்தப்பட வேண்டும் எனக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு நடத்து முறையும் எந்தெந்த அடிப்படைக் கூறுகளில் பயன் படுத்தப்பட வேண்டும் என்பதைக் குறிக்கும் பொருட்டு 30 அடிப்படைக் கூறுகளையும் பின்வருமாறு எண்களைக் கொண்டு குறிப்பிடலாம்.

1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7
13	14	15	16	17	18
24	23	22	21	20	19
25	26	27	28	29	30

ராண்டம் அட்டவணையிலிருந்து 30-க்குக் கீழுள்ள ஐந்து எண்கள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வெண்கள் 3, 8, 19, 20, 26 எனக் கொண்டால், இவ்வெண்களைக் கொண்ட அடிப்படைக் கூறுகளில் ஆறு நடத்து முறைகளில் ஏதாவது ஒன்று (C நடத்து முறை) பயன்படுத்தப் படுகின்றது. பின்பு மறுபடியும் ஐந்து ராண்டம் எண்கள் (30-க்குக் கீழுள்ளவை) எடுக்கப்படுகின்றன. முன்பு எடுக்கப்பட்ட எண்கள் வருமாயின், அவைகள் விடப் பட்டு அடுத்துள்ள எண்கள் எடுக்கப்படுகின்றன. 18, 25, 7, 14, 30 என்பன அவ் வெண்களாயின், அவை குறிக்கும் அடிப்படைக் கூறுகளில் மீதியுள்ள ஐந்து நடத்து முறைகளில்

ஏதாவது ஒன்று (A நடத்து முறை) பயன்படுத்தப்படுகின்றது. இவ்வாறே எல்லா நடத்து முறைகளுக்கும் அடிப்படைக் கூறுகள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. எல்லா நடத்து முறைகளையும் சமவாய்ப்பு முறையில் 30 அடிப்படைக் கூறுகளில் பயன்படுத்தப்படுவதைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

D_1	B_2	C_3	B_4	B^5	E_6
E_{12}	F_{11}	D_{10}	D_9	C_8	A_7
E_{13}	A_{14}	E_1^5	B_{16}	D_{17}	A_{18}
F_{24}	F_{23}	B_{22}	F_{21}	C_{20}	C_{19}
A_{25}	C_{26}	E_{27}	F_{28}	D_{29}	A_{30}

இதில் நடத்து முறைகள் ஒவ்வொன்றும் ஐந்தைந்து தடவைகள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. இவ்வாறின்றி, ஒவ்வொரு நடத்து முறையும் திரும்பப் பயன்படுத்தப்படும் தடவைகள் வேறுபடலாம். பொதுவாக, m நடத்துமுறைகள் N அடிப்படைக் கூறுகளில் பயன்படுத்தப்படவேண்டும் எனக் கொள்வோம். N அடிப்படைக் கூறுகளிலிருந்து n_1 அடிப்படைக்கூறுகள் சரிசமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு, m நடத்து முறைகளில் ஏதாவதொன்று இவற்றில் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. பிறகு மீதியுள்ள $(N-n_1)$ அடிப்படைக் கூறுகளிலிருந்து n_2 அடிப்படைக் கூறுகள் சரிசம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு, அவற்றில் மீதியுள்ள $(m-1)$ நடத்துமுறைகளில் ஏதாவதொன்று பயன்படுத்தப்படுகின்றது. இந்த முறை எல்லா நடத்து முறைகளையும் பயன்படுத்தும் வரை மேற்கொள்ளப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு நடத்துமுறையும் பயன்படுத்தப்படும் தடவைகள் முறையே $n_1, n_2, .., n_n$ ஆகும் N அடிப்படைக்கூறுகளில் நடத்துமுறைகள் யாவும் பயன்படுத்தப் பட்டுள்ளதால் $n_1+n_2+\ldots+n_n=N$ எல்லா நடத்துமுறைகளும் ஒரே எண்ணிக்கையில்திரும்பப்பயன்படுத்தப்படும் பொழுது $n_1=n_2\ldots=n_1=m$, $nm=N$. நடைமுறையில் உள்ள கட்டுப்பாடுகளினாலோ

(practical limitations) அல்லது நடத்துமுறைகளின் முக்கியத் துவத்தினாலோ, ஒவ்வொரு நடத்துமுறைக்கும் திரும்பப்பயன் படுத்தப்படும் தடவைகள் வேறுபடலாம். அவ்வாறில்லாத மற்ற சமயங்களில் எல்லா நடத்து முறைகளும் சமமான எண்ணிக்கையில் திரும்பப் பயன்படுத்தப்படவேண்டும்.

முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டத்தின் சிறப்புகள்

(1) இத்திட்டம் எளிதில் அமைக்கக் கூடியது; எளிதில் இசைந்து கொடுக்கக்கூடிய தன்மை (flexbility) வாய்ந்தது. பயன்படுத்தப்படவேண்டிய நடைமுறைகளின் எண்ணிக்கைக் கும் ஒவ்வொரு நடத்து முறையும் திரும்பப் பயன் படுத்தப்படும் எண்ணிக்கைக்கும் கட்டுப்பாடுகிடையாது. திரும்பப் பயன் படுத் தப்படும் எண்ணிக்கையை நடத்துமுறைக்கு நடத்துமுறை மாறுபடுத்தலாம். கிடைக்கக்கூடிய (available) பரிசோதனைக் கூறு அனைத்தையும் பயன்படுத்தலாம்.

(2) செய்முறைத் திட்ட அமைப்புகளில் இத் திட்டத்திற் கான ஆய்வு முறை யாவற்றிலும் எளிது. நடத்துமுறைக்கு நடத்துமுறை ரெப்லிகேசன்களின் எண்ணிக்கை (நடத்து முறைகள் திரும்பப்பயன் படுத்தப்படும் எண்ணிக்கை) வேறுபடி னும், ஆய்வுமுறை எளிதாகவே உள்ளது.

(3) குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையிலான நடத்துமுறைகளுக் கும், அடிப்படைக் கூறுகளுக்கும் இத் திட்டத்தில் பிழையை மதிப்பிட அதிகமான வரையற்ற பாகைகள் உள்ளன. ஒரு திட்டத்தில் பிழைக்கான வரையற்ற பாகைகள் அதிகரிக்கும் பொழுது அத் திட்டத்தின் நுட்பப்பண்பு (sensitivity) அதிகரிக் கின்றது. சிறிய சோதனை களில், மற்ற திட்டங்களில் பிழைக் கான வரையற்ற பாகைகள் குறையும் அளவு பிழையின்மை (accuracy) அதிகரிக்காமல் இருந்தால், அந்த மாதிரி சமயங் களில் முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டமே சிறந்தது.

(4) சில அடிப்படைக் கூறுகளிலிருந்து பெறப்பட்ட முடிவு கள் தவறிப் போனால் ஆய்வு முறை எளிதாகவேயுள்ளது: தவ றிப்போன முடிவுகளினால் ஏற்படும் தகவல் இழப்பு (loss of imformation) இத் திட்ட அமைப்பில் மற்ற திட்ட அமைப்புகளில் உள்ளதைவிடக் குறைவு.

ஆனால், இத்திட்டம் ஒருபடித்தானதாக உள்ள பரிசோதனைக் கூறு இருந்தால் மட்டுமே பயன்படும். அதிக அளவு எண்ணிக்கையில் நடத்துமுறைகளைப் பயன்படுத்த அதற்குத் தகுந்த அளவில் பெரிதாத ஒரே மாதிரியாக உள்ள பரிசோதனைக் கூறு வேண்டியுள்ளது. பரிசோதனைக் கூறு பெரிதாகும் பொழுது பொதுவாக அது ஒருபடித்தானதாக அமைவதில்லை. ஆகவே, குறைந்த எண்ணிக்கையிலுள்ள நடத்து முறைகளுக்கே இத்திட்டம் உகந்ததாக இருக்கின்றது. பரிசோதனைக் கூறில் மாறுபாடு இருக்கும்பொழுது, இத் திட்டத்தைவிடச் சிறந் ததிட்டங்களை அமைக்க இயலும். முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டத்தில் அடிப்படைக்கூறுகளுக்கு இடையேயுள்ள மாறுபாடு பரிசோதனைப் பிழையுடன் (experimental error) சேர்ந்துள்ளது. வேறு திட்டங்களில் இம் மாறுபாடு பிரிக்கப்பட்டு பிழையின் அளவு குறைக்கப்படுகின்றது. எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையான ரெப்லிகேட்டுகளுக்கு வேறு வகைத் திட்டங்களில், இத் திட்டத்தில் பெறுவதைவிட திட்டமான அளவில் நடத்துமுறை கூட்டிடைகளின் மதிப்பீடுகளைப் பெற முடிகின்றது. ஆய்வுக்கூடங்களில் செய்யப்படும் சோதனைகளுக்கு இத் திட்டம் உகந்ததாகத் தெரிகின்றது. இங்கு, ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு சோதனைக்கான பொருள் (material) நன்கு கலக்கப்பட்ட பின்பு சிறுசிறு கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. இச் சிறு கூறுகள் ஒரே மாதிரியாக அமைகின்றன. இச் சிறு கூறுகளுக்கு நடத்துமுறைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. களப் பரிசோதனைகளுக்கு (field experiments) இத் திட்டம் அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுவதில்லை. மற்ற திட்டங்களே இச்சமயங்களில் திட்டமான முடிவுகளைத் தருகின்றன.

முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டத்தின் ஆய்வுமுறை

கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் வேளாண்மைத்துறையின் பாற்பட்ட ஒரு பரிசோதனையின் முடிவுகள் தரப்பட்டுள்ளன. 30 அடிப்டைக் கூறுகளில் பருத்தியின் விளைச்சலின் அளவுகள் தரப்பட்டுள்ளன. இருவகை உரங்கள் P, N, இருமட்டங்கள் P_1, P_2, N_1, N_2-ல் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. 6 அடிப்படைக் கூறுகளில் இவ்வுரங்கள் பயன்படுத்தப்படவில்லை. உரங்களைப் பயன்படுத்தியதால் விளைச்சல்களில் ஏற்பட்ட வேறுபாடுகளையும், இருவகை உரங்களுக்கு இடையே விளைச்சல்களில் வேறுபாடு குறிப்பிடத்தகுந்த அளவில் உள்ளதா என்பதையும் சோதிக்கலாம்.

அட்டவணை 7.1.1 முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டத்தில் பருத்தியின் விளைச்சல் (அவுன்சுகளில்)

O 15.0	P_1 19.1	P_2 25.4	N_2 35.2	N_1 20.2	O 8.8
P_1 15.6	O 10.1	N_1 17.3	N_2 30.6	N_1 13.9	P_2 24.8
N_2 20.1	N_1 26.4	P_1 17.4	P_1 25.0	P_2 30.1	O 9.0
P_2 17.5	N_2 30.0	N_2 25.9	P_1 18.0	P_1 20.4	P_1 13.5
N_1 21.5	O 20.1	O 13.5	N_1 14.3	P_2 27.1	N_2 22.8

குறியீடு. 0—கட்டுப்பாடு P_1, P_2; N_1, N_2 இருவகை உரங்களின் இருமட்டங்கள்.

அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்ட விளைச்சல்களை ஆராய அவற்றைக் கட்டுப்பாட்டிற்கும் உரங்களுக்கும் தகுந்தவாறு பிரித்துக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்தலாம்.

அட்டவணை 7.1.2. **உரங்கள்**

	O	P_1	P_2	N_1	N_2	
	15.0	19.1	25.4	20.2	35.2	
	8.8	15.6	24.8	17.3	30.6	
	10.1	17.4	30.1	13.9	20.1	
	9.0	25.0	17.5	26.4	30.0	
	13.5	18.0	20.4	21.5	25.9	
	20.1	13.5	27.1	14.3	22.8	
மொத்தம்	76.5	108.6	145.3	113.6	164.6	608.6
கூட்டிடை	12.75	18.10	24.22	18.93	27.43	20.29

முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டம் பரவற்படி ஆய்வு ஒரு வழிப் பிரிவைச் சேர்ந்ததாகும். எனவே, இத் திட்டத்திற்கான கணக்கீடுகள் ஒரு வழிப் பிரிவிலுள்ளவையே. m நடத்துமுறைகளும், ஒவ்வொரு நடத்துமுறையிலும் n மதிப்புகளும் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$x_{ij} = i$ ஆவது நடத்துமுறையில் j ஆவது மதிப்பு.

$i = 1, 2, \ldots\ldots m \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots n.$

$T_i = i$ ஆவது நடத்து முறைக்கான மதிப்புகளின் மொத்தம்.

T = மொத்தக் கூட்டுத் தொகை $N = mn$.

அட்டவணை 7. 1. 3

முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டத்தின் பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	கணக்கிடப்பட்ட F மதிப்பு
நடத்துமுறைகளிடையே	$m-1$	$S_2 = \sum_i \frac{T_i^2}{n} - \frac{T^2}{N}$	$S_2/m-1 = mS'_2$	S'_2/S'_1
நடத்துமுறைகளகத்தே	$N-m$	$S_1 = S - S_2$	$S_1/N-m = S'_1$	
மொத்தம்	$N-1$	$S = \sum_i \sum_j x^2_{ij} - \frac{T^2}{N}$		

தரப்பட்டுள்ள பரிசோதனைக்கான கணக்கீடுகள்

(1) சரியீட்டளவு $= \frac{T^2}{N} = \frac{(608.6)^2}{30} = \frac{370393.96}{30}$

$= 12346.47$

(2) $\sum_i \sum_j x^2_{ij} = (15.0)^2 = (8.8)^2 + \ldots\ldots + (25.9)^2 + (22.8)^2$

$= 13671.22$

(3) $\sum_i \frac{T_i^2}{n}$

$$= \frac{(76.5)^2+(108.6)^2+(145.3)^2+(113.6)^2+(164.6)^2}{6}$$

$$= \frac{78756.42}{6} = 13126.07$$

(4) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= S = \sum_i \sum_j x^2_{ij} - \frac{T^2}{N}$$

$$= (2) - (1)$$

$$= 1324.75$$

(5) உரங்களிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S_2 = \sum_i \frac{T_i^2}{n} - \frac{T^2}{N}$$

$$= (3) - (1)$$

$$= 779.60$$

(6) உரங்களகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S_1 = S - S_2$$

$$= (4) - (5)$$

$$= 545.15$$

அட்டவணை 7. 1. 4

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு
உரங்களிடையே	4	779.60	194.90	8.94	5% 2.76 1% 4.18
உரங்களகத்தே	25	545.15	21.81		
மொத்தம்	25	1324.75			

இப் பரிசோதனையில் உரங்களின் விளைவுகளில் வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோள் சோதிக்கப்படுகின்றது.

கணக்கிடப்பட்ட F மதிப்பு கோட்பாட்டியலான F மதிப்பை விட அதிகமாக இருப்பதால் 1 சதவீத மட்டத்தில், உரங்களின் விளைவுகளில் வேறுபாடுகள் இல்லை என்ற எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுகின்றது. எனவே, உரங்களின் விளைவுகளில் வேறுபாடுகள் உள்ளன என்ற முடிவு ஏற்படுகின்றது.

பரவற்படி. ஆய்வு ஒருவழிப்பிரிவில் கூறியுள்ளபடி, கூட்டிடைகளிடையே உள்ள வேறுபாடுகளை, மீச்சிறு பொருளுடை வேறுபாட்டையோ அல்லது ஸ்டூடண்டைசுடு வீச்சு Q ஐப் பயன்படுத்தியோ சோதிக்கலாம்.

இச்சோதனைக்கான மீச்சிறு பொருளுடை வேறுபாடு

$$= \sqrt{\frac{2\,s^2}{n}} \cdot t_{.05,\,25}$$

$$= 2.70 \times 2.06$$

$$= 5.56$$

எனவே, குறிப்பிட்ட இரு கூட்டிடைகளிடையேயுள்ள வேறுபாடு 5.56 ஐ விட அதிகமாக இருந்தால், வேறுபாடு 5 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இருக்கின்றது.

Q முறையை அல்லது தொடர்ச்சியான Q முறையைப் பயன்படுத்தி கூட்டிடைகளை முன்பு கூறியவாறு சோதிக்கலாம். O, N_2; O, P_2; P, N_2; N_1, N_2 ஆகிய இணைக் கூட்டிடைகளில் வேறுபாடுகள் பொருளுடை வகையில் அமைந்திருப்பதைக் காணலாம்.

நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையை உட்பிரிவுகளாகப் பிரித்தல்

எல்லா நடத்து முறைகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரியைக் கொண்டு செய்யப்படும் F சோதனை, பொதுவாக நடத்து முறைகளிடையே வேறுபாடுகள் உள்ளனவா என்பதனைத் தெரிவிக்கின்றது. ஆனால் இரு நடத்து முறைகளையோ அல்லது இரு நடத்துமுறைத் தொகுதிகளையோ ஒப்பிட நடத்து முறைகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

அதற்குத் தகுந்தவாறு பிரிக்கப்படுகின்றது. அவ்வாறு பிரிக்கப் பட்ட பகுதிகளுக்கு F சோதனை பயன்படுத்தப்படுகின்றது. நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைப் பிரிப்பதற் கான சில விதிகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

நடத்து முறை ஒப்புமைகள் (Treatment Comparisons) வழக்க மாக நடத்துமுறை மொத்தங்களிலிருந்து கணக்கிடப்படு கின்றன. $T_1, T_2 \ldots T_i \ldots T_m$ என்பன m நடத்துமுறைகளின் மொத்தங்கள். இம் மொத்தங்களை ஒரு நேர்கோட்டுச் சார் பாகக் (linear function) குறிக்கலாம். A என்பது நேர்கோட்டுச் சார்பைக் குறிப்பதாகக் கொண்டால்,

$$A_1 = a_{11} T_1 + a_{12} T_2 + \ldots\ldots + a_{1i} T_i + \ldots\ldots + a_{1m} T_m.$$

இந்நேர்கோட்டுச் சார்பில்,

$a_{11} + a_{12} + \ldots\ldots + a_{1i} + \ldots\ldots + a_{1m} = 0$ ஆக இருந்தால், அது நடத்து முறை மொத்தங்களிடையே ஓர் ஒப்புமை (comparison) ஆகும் ஏடுத்துக்காட்டாக,

$$T_1 - 2T_2 + T_3,$$
$$3T_1 - T_2 - T_3 - T_4,$$
$$T_1 + T_2 - T_3 - T_4$$

என்பன நடத்து முறை மொத்தங்களிடையே ஒப்புமைகள் ஆகும்.

$$A_k = a_{k1} T_1 + a_{k2} T_2 + \ldots\ldots + a_{ki} T_i + \ldots\ldots + a_{km} T_m$$

என்பது தடத்து முறை மொத்தங்களிடையே ஏதாவது ஓர் ஒப்புமை எனில்,

$A^2_k / n \sum_{i=1}^{m} a^2_{ki}$ என்பது நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையின் ஒரு பகுதியாகும். இப் பகுதிக்கான வரையற்ற பாகை ஒன்று. n என்பது ஒவ்வொரு நடத்துமுறையிலும் உள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை.

$A_2 = a_{21} T_1 + a_{22} T_2 + \ldots\ldots + a_{2i} T_i + \ldots\ldots + a_{2m} T_m$ என்பது மற்றொரு ஒப்புமை.

A_1, A_2 என்ற இரு ஒப்புமைகளில்,

$a_{11}\,a_{21} + a_{12}\,a_{22} + \ldots\ldots + a_{1i}\,a_{2i} + \ldots\ldots + a_{1m}\,a_{2m} = 0$ ஆக இருப்பின் A_1-ம், A_2-ம் ஒன்றையொன்று சாராது (Orthogonal) இருக்கின்றன. இவ்விதியைப் பயன்படுத்தும் பொழுது, ஒரு குறிப்பிட்ட நடத்துமுறை, ஒப்புமையில் இடம்பெறவில்லை யெனில் அந் நடத்து முறையின் மொத்தத்தின் கெழு (co-efficient) பூச்சியம் எனக் கொள்ளப்படுகின்றது.

$$A_1 = T_1 + T_2 + T_3 - T_4 - T_5 - T_6$$

$$A_2 = T_1 - T_3 + T_4 - T_6$$

என்பன ஒன்றையொன்று சாராத ஒப்புமைகள். ஏனெனில்,

$$\sum a_{1i}\,a_{2i} = (1\times1) + (1\times0) + (1\times-1) + (-1\times1)(-1\times0) + (-1\times-1)$$

$$= 1 + 0 + (-1) + (-1) + 0 + 1$$

$$= 0$$

A_1-ம், A_2-ம் ஒன்றையொன்று சாராத ஒப்புமைகளாயின்,

$$\frac{A_2^{\,2}}{n\sum_{i=1}^{m} a_2{}^2{}_i} \text{ என்பது,}$$

$$\left(\text{நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை} - \frac{\dfrac{A_1^{\,2}}{m}}{n\sum_{i=1} a^2{}_{1i}}\right)\text{-ன்}$$

ஒரு பகுதியாகும். இப் பகுதிக்குரிய வரையற்ற பாகை ஒன்று.

எனவே, நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை, A, ஒப்புமைக்கான வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை மீதி வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை எனப் பிரித்து, மீண்டும் மீதி வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை உட்பிரிவு களாகப் பிரிக்க விரும்பினால் A, ஒப்புமையைச் சார்ந்திராத நடத்துமுறை ஒப்புமைகளைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

m நடத்துமுறை மொத்தங்களைக் கொண்டு ஒன்றை யொன்று சார்ந்திராத (mutually orthogonal) $(m-1)$ நடத்து முறை ஒப்புமைகளைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். அவ்வொப்புமை கள், $A_1, A_2, \ldots A_k, \ldots A_{m-1}$ எனில்,

$$\left(\frac{A_1^2}{n\sum a_1{}^2{}_i} + \frac{A_2^2}{n\sum_i a_2{}^2{}_i} + \dots + \frac{A_k^2}{n\sum_i a^2{}_{ki}} + \dots + \frac{A^2{}_{m-1}}{n\sum a^2{}_{(m-1)i}}\right)$$

= நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

இப்பகுதிகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு வரையற்ற பாகையைக் கொண்டுள்ளது.

பருத்தியின் விளைச்சல்கள்மீது உரங்களின் விளைவுகள் பற்றிய சோதனையில், கட்டுப்பாடு விளைச்சல்களின் மொத்தத்திற்கும், உரங்கள் விளைச்சல்களின் மொத்தங்களுக்குமான ஒப்புமையைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

	O	P_1	P_2	N_1	N_2
விளைச்சல்களின் மொத்தம் T_i	76.5	108.6	145.3	113.6	164.6
a_{1i}	4	+1	+1	+1	+1

$$A_1 = (-4 \times 76.5) + 108.6 + 145.3 + 113.6 + 164.6$$

$$= -306.0 + 532.1$$

$$= 226.1$$

A_1 ஒப்புமை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{A_1^2}{n\sum_i a_{ii}^2} = \frac{(226.1)^2}{6\,(16+1+1+1+1)}$$

$$= \frac{51121.21}{120}$$

$$= 426.01$$

இதற்குரிய வரையற்ற பாகை ஒன்று.

மீதி = 779.60 − 426.01

= 353.59.

இனி, P உரத்திற்கும் N உரத்திற்கும் ஒப்புமையான A_2ஐ A_1ஐச் சாந்திராதவாறு தேர்ந்தெடுக்கலாம். A_2 ஒப்புமையைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

	O	P_1	P_2	N_1	N_2
விளைச்சல்களின் மொத்தம்	76.5	108.6	145.3	113.6	164.6
a_{1i}	− 4	+ 1	+ 1	+ 1	+1
a_{2i}	0	− 1	− 1	+ 1	+1

$$A_2 = -108.6 - 145.3 + 113.6 + 164.6$$

$$= -253.9 + 278.2 = 24.3.$$

$$\sum_i a_{1i}\, a_{2i} = (-4\times 0) + (+1\times -1) + (+1\times -1) + (1\times 1) + (1\times 1)$$

$$= 0-1-1+1+1$$

$$= 0.$$

எனவே A_1, A_2 ஒப்புமைகள் ஒன்றையொன்று சாராது உள்ளன.

A_2 ஒப்புமை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{A^2}{n \sum a^2_{2i}} = \frac{(24.3)^2}{6\,(1+1+1+1)} = \frac{590.49}{24}$$

$$= 24.60$$

இனி,

P_1, P_2 உரங்களின் ஒப்புமையான A_3 ஐயும்

N_1, N_2 உரங்களின் ஒப்புமையான A_4 ஐயும்

A_1, A_2, A_3, A_4 ஆகியவை ஒன்றையொன்று சார்ந்திராதவாறு காணலாம்.

A_1, A_2, A_3, A_4 ஆகிய ஒப்புமைகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

		O	P_1	P_2	N_1	N_2
விளைச்சல்களின் மொத்தம்	T_i	76.5	108.6	145.3	113.6	164.6
	a_{1i}	4	+1	+1	+1	+1
	a_{2i}	0	−1	−1	+1	+1
	a_{3i}	0	−1	+1	0	0
	a_{4i}	0	0	0	−1	+1

$\sum a_{1j}\ a_{2i} = 0 \qquad \sum a_{1i}\ a_{3i} = 0$

$\sum a_{2i}\ a_{3i} = 0 \qquad \sum a_{3i}\ a_{4i} = 0$

$\sum a_{1i}\ a_{4i} = 0 \qquad \sum a_{2i}\ a_{4i} = 0$

என இருப்பதைக் காணலாம். எனவே, A_1, A_2, A_3, A_4 ஆகிய ஒப்புமைகள் ஒன்றையொன்று சாராது உள்ளன.

$A_3 = -108.6+143.3 = 36.7$

$A_4 = -113.6+164.6 = 51.0$

A_3 ஒப்புமை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{A_3^2}{n \sum_i a_{3i}^2} = \frac{(36.7)^2}{6\ (1+1)} = \frac{1346.89}{12}$$

$$= 112.24$$

A_4 ஒப்புமை வர்க்கங்ளின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{A_4^2}{n \sum_i a^2_{4i}} = \frac{(51.0)^2}{n\ (1+1)} = \frac{2601.00}{12}$$

$$= 216.75$$

A_1, A_2, A_3, A_4 ஆகிய ஒப்புமைகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$= 426.01+24.60+112.24+216.75$

$= 779.60$

= உரங்களிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

இது காறும் பார்த்தவற்றை பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

அட்டவணை 7. 1. 5

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு 5%
உரங்களிடையே	4	779.60	194.90	8.94	2.76
O-க்கும் $P_1+P_2+N_1+N_2$-க்கும் ஒப்புமை (O vs $P_1+P_2+N+N_2$)	1	426.01	426.01	19.53	4.24
P-க்கும் N-க்கும் ஒப்புமை	1	24.60	24.60	1.13	4.24
P_1-க்கும் P_2க்கும் ஒப்புமை	1	112.24	112.24	5.15	4.24
N_1-க்கும் N_2-க்கும் ஒப்புமை	1	216.75	216.75	9.94	4.24
உரங்களகத்தே	25	545.15	21.81		
மொத்தம்	29	1324.75			

கட்டுப்பாட்டுடன் ஒப்பிடும் பொழுது P, N உரங்களின் விளைவுகள் 1 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடைய வகையில்

உள்ளன. அதாவது உரங்களினால் விளைச்சல்கள் பொருளுடைய வகையில் அதிகமாயுள்ளன. ஆனால், P உரத்தின் விளைவிற்கும் N உரத்தின் விளைவிற்கும் இடையே வேறுபாடு இல்லை. P உரத்தின் மட்டங்களின் விளைவுகள் 5 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடைய வகையில் வேறுபடுகின்றன. N_1-க்கும் N_2-க்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாடு 1 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இருக்கின்றது.

இரு உரங்களின் விளைவுகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாட்டை t-மதிப்பைக் கொண்டும் சோதனையிடலாம்.

$\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ என்பன இரு நடத்து முறைகளின் கூட்டிடைகள் எனில்,

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_d}$$

இதில் S_d என்பது இரு நடத்து முறைகளின் கூட்டிடைகளின் வேறுபாட்டின் மதிப்பிடப்பட்ட தரப்பிழை (estimated standard error) ஆகும்.

$$S_d = \sqrt{s_2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

s_2 = பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி.

n_1, n_2 என்பன முறையே ஒப்பிடப்படும் நடத்து முறைகளில் உள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை.

$n_1 = n_2 = n$ ஆக இருந்தால்,

$$S_d = \sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2\, s^2}{n}}$$

't' சோதனைக்கான வரையற்ற பாகைகள் பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கானவையே.

இனி, கட்டுப்பாட்டின் கூட்டிடைக்கும், P, N உரங்களின் கூட்டிடைக்கும் உள்ள வேறுபாட்டை t மதிப்பைக் கொண்டு சோதனையிடலாம்.

P, N உரங்களின் கூட்டிடை = 22.17

கட்டுப்பாட்டுன் கூட்டிடை = 12.75

$$S_d = \sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

கட்டுப்பாட்டில் உள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை $= n_1 = 6$.

P, N உரங்களில் உள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை $\Big\} = n_2 = 24$

$$s^2 = 21.81$$

$$\therefore \quad S_d = \sqrt{21.81\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)}$$

$$= 2.13$$

$$\therefore \quad t = \frac{22.17 - 12.74}{2.13}$$

$$= 4.42$$

$$t_{.05,\ 25} = 2.60; \quad t_{.01,\ 25} = 2.787$$

எனவே, கட்டுப்பாடு கூட்டிடைக்கும் P, N உரங்களின் கூட்டிடைக்கும் உள்ள வேறுபாடு 1 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இருக்கின்றது.

கணக்கிடப்பட்ட t-ன் வர்க்கம் $= (4.42)^2 = 19.53$. இது பரவற்படி ஆய்வில் உள்ள, கட்டுப்பாட்டிற்கும் P, N உரங்கள் ஒப்புமைக்கான F மதிப்புடன் பொருந்துவதைக் காணலாம். $t^2 = F$ என்ற உறவை இது காட்டுகிறது.

இது போன்றே மற்ற கூட்டிடைகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டை 't' மதிப்பைக் கொண்டு சோதனையிடலாம்.

2. சமவாய்ப்புக் கட்டுதிட்ட அமைப்பு

(Randomised Block Design)

முழுமையும் சமவாய்ப்புத்திட்டம் பரிசோதனைக் கூறு முழுமையும் ஒருபடித்தானதாக இல்லாதபொழுது சிறப்புடையதன்று. பரிசோதனைக்கூறின் மாறுபாட்டிற்கேற்ப அமைக்கப்படும் திட்டமே அப்பொழுது சிறந்தது. ஒருபடித்தானதாக இல்லாத பரிசோதனைக்கூறு, ஒருபடித்தானதாக உள்ள பகுதிகளாகப் (groups or strata) பிரிக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு பிரிக்கப்பட்ட பகுதிகள் ரெப்லிகேசன்கள் (Replicutions) அல்லது பிளாக்குகள் (Blocks) எனப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு பிளாக்கிலும் உள்ள அடிப்படைக் கூறுகளு (plots)க்கு எல்லா நடத்துமுறைகளும் ராண்டம் முறையில் ஒதுக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு அமைக்கப்படும் திட்டம் சமவாய்ப்புக் கட்டுதிட்ட அமைப்பு என்படுகின்றது. களப் பரிசோதனைகளு (field experiments)க்கு இப்பெயர் முதன் முதலில் பேராசிரியர் ∴பிசரால் அளிக்கப்பட்டது. முன்பு, ஆய்வளார்களால் நடத்துமுறைகள் யாவும் ஒவ்வொரு பிளாக்கிலுமுள்ள அடிப்படைக் கூறுகளுக்கு ஓர் ஒழுங்கு அமைப்பில் (systematic arrangement) ஒதுக்கப்பட்டு வந்தன. ஒழுங்கு அமைப்பு முறையில் ஒருபுறச்சாய்வு (bias) ஏற்பட வழிஉள்ளது எனக்கூறி, ஒவ்வொரு பிளாக்கிலும் ராண்டம் முறையில் அடிப்படைக்கூறுகளுக்கு நடத்துமுறைகளை ஒதுக்கும் முறையை ∴பிசர் ஏற்படுத்தினர். பரவற்படி ஆய்வில், சிறப்புகாண் சோதனைக்குப் பரிசோதனையில் பிழைகள் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்றவைகளாக இருக்கவேண்டும் எனக் கொள்ளப்படுகின்றது. ஒழுங்கு அமைப்பு முறையில் இத் தற்கோள் பூர்த்தி செய்யப்படுவதில்லை. ஏனெனில், அருகருகே உள்ள அடிப்படைக் கூறுகள் ஒரேமாதிரியான விளைவுகளைக் கொண்டிருக்க வாய்ப்புகள் உள்ளன. ராண்டம் முறை அருகருகே உள்ள அடிப்படைக்கூறுகளின் விளைவுகளைத் தொடர்பற்றவைகளாக ஆக்குவதில்லை. ஆனால், அத் தொடர்புகளை அடிப்படைக்கூறுகள் அனைத்திலும் பரவலாக இருக்கச் செய்து F பரவல் பரிசோதனையின் விளைவுகளுக்குப் பொருத்தமுடைய தாக்குகின்றது.

இப்பரிசோதனைத்திட்டத்தில் நடத்துமுறை விளைவுகளும், பிளாக்கு விளைவுகளும் ஒன்றையொன்று சாராது (orthogonal) உள்ளன எனக் கொள்ளப் படுகின்றன. இருவிளைவுகள் ஒன்றோடொன்று இரண்டறக் கலந்திராமல் தனித்தனியே மதிப்பிடக் கூடியவாறு இருப்பின், அவ்விளைவுகள் ஒன்றையொன்று சாராது

உள்ளன எனப்படுகின்றது. எடுத்துக் காட்டாகக் கீழ்க்கண்ட சோதனையைக் காணலாம்:

அட்டவணை 7.2.1

நடத்துமுறைகள்

பிளாக்குகள்	M	N	O
1	x_{M1}	x_{N_1}	x_{o1}
2	x_{M_2}	x_{N_2}	x_{o2}
3	x_{M3}	x_{N3}	x_{03}

ஒவ்வொரு நடத்துமுறையும் ஒவ்வொரு தடவை ஒவ்வொரு பிளாக்கிலும் வருகின்றது. ஒரு குறிப்பிட்ட நடத்துமுறை (M எனக் கொள்வோம்). அதிக விளைவு கொண்டதாய் இருப்பினும் அது பிளாக்குகளிடையே உள்ள மாறுபாட்டைப் பாதிக்காது. ஏனெனில், அந்த நடத்துமுறை (M) ஒவ்வொரு பிளாக்கிலும் இருக்கின்றது. இவ்வாறே ஒரு குறிப்பிட்ட பிளாக்கு அதிக விளைவுடையதாய் இருப்பினும் அது நடத்துமுறைகளிடையே உள்ள மாறுபாட்டைப் பாதிக்காது. எனவே, நடத்துமுறை விளைவுகளும், பிளாக்கு விளைவுகளும் ஒன்றையொன்று சார்ந்து இல்லை எனக் கூறலாம். எனவே, நடத்துமுறை விளைவுகளையும் பிளாக்கு விளைவுகளையும் தனித்தனியே மதிப்பிடலாம்

சமவாய்ப்புக் கட்டுதிட்ட அமைப்பின் அமைப்பு முறை

எடுத்துக்காட்டாக $A, B, C, D, E, F,$ எனும் ஆறு நடத்துமுறைகள் ஒவ்வொன்றையும் ஐந்தைந்து தடவைகள் பயன்படுத்தப்படுமாறு சோதனைத்திட்டத்தை அமைக்கலாம். இந்தச் சோதனைத்திட்டத்தில் ஐந்து பிளாக்குகளும், ஒவ்வொரு பிளாக்கிலும் ஆறு அடிப்படைக் கூறுகள் வீதம் மொத்தம் முப்பது அடிப்படைக் கூறுகளும் உள்ளன. முதல் பிளாக்கிலுள்ள ஆறு அடிப்படைக்கூறுகளுக்கு ஆறு நடத்துமுறைகள் ராண்டம் முறையில் ஒதுக்கப் படுகின்றன. இவ்வாறே மற்ற நான்கு பிளாக்குகளுக்கும் செய்யப்படுகின்றன. இத் திட்ட அமைப்பு கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 7.2.2

நடத்து முறைகள்

	C	D	A	E	B	F
பிளாக்கு 1	1	2	3	4	5	6
	A	F	C	D	E	B
பிளாக்கு 2	7	8	9	10	11	12
	A	C	E	D	B	F
பிளாக்கு 3	13	14	15	16	17	18
	F	E	D	B	C	A
பிளாக்கு 4	19	20	21	22	23	24
	B	C	E	D	A	F
பிளாக்கு 5	25	26	27	28	29	30

சமவாய்ப்புக் கட்டு திட்ட அமைப்பின் சிறப்புகள்

(1) பரிசோதனைக்கூறு ஒரே மாதிரியான பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுவதால் முழுமையும் சமவாய்ப்புத்திட்டத்தைவிட இத் திட்டம் சரிநிலையான (accurate) முடிவுகளைத் தருகின்றன. பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையிலிருந்து பிளாக்கு வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை பிரிக்கப்படுவதால், பிழைவர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரியின் மதிப்பு குறைகின்றது. (2) இத் திட்டத்தில் எவ்வளவு நடத்துமுறைகளை வேண்டுமானாலும் சோதனை செய்யலாம். ஒவ்வொரு நடத்துமுறையையும் எவ்வளவுதடவை வேண்டுமானாலும் திரும்பப் பயன்படுத்தலாம். மேலே கூறப்பட்டுள்ள அமைப்பு முறையில் ஒவ்வொரு நடத்துமுறையும் சமமான எண்ணிக்கையில் திரும்பப் பயன் படுத்தப்பட்டுள்ளன. ஏதாவது ஒரு நடத்துமுறையை அதிக எண்ணிக்கையில் திரும்பப் பயன் படுத்த வேண்டியிருந்தால், அந்த நடத்துமுறையை ஒவ்வொரு பிளாக்கிலும் இருதடவை பயன்படுத்தலாம். இவ்வாறு செய்வதால் குறிப்பிட்ட நடத்து முறை மற்ற நடத்துமுறைகளை விட இரு மடங்கு முறை திரும்பப் பயன் படுத்தப் படுகின்றது. இம்முறையில் விரும்பிய நடத்து

முறைகளை மற்ற நடத்துமுறைகளைவிட அதிக தடவைகள் திரும்பப் பயன்படுத்தலாம். இதே மாதிரி ஒரு நடத்து முறையை ஒவ்வொரு பிளாக்கிலும் மூன்று தடவைகள், நான்கு தடவைகள் எனப் பயன்படுத்தலாம். இத்திட்டத்தில், குறைந்தது இரண்டு பிளாக்குகளிலாவது நடத்து முறைகள் திரும்பப் பயன்படுத்தப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

(3) இதற்கான ஆய்வு முறை மிக எளியது. ஒரு பிளாக்கினுடைய விவரங்கள் அல்லது ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நடத்துமுறைகளின் விவரங்கள் தவறியிருந்தாலும் (missing), ஆய்வுமுறையில் சிக்கல்கள் ஏற்படுவதில்லை. சில அடிப்படைக் கூறுகளின் விவரங்கள் தவறியிருந்தாலும் கிடைத்துள்ள விவரங்களை முற்றிலும் பயன்படுத்த முடிகின்றது.

ஒவ்வொரு பிளாக்கிலும் பயன்படுத்தப்படும் நடத்துமுறைகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாகும்பொழுது பிழையைக் கட்டுப்படுத்துவதில் இத்திட்டத்தின் திறன் குறைகின்றது. ஏனெனில் அதிக எண்ணிக் கையிலான நடத்து முறைகளைப் பயன்படுத்தப் பிளாக்கின் அளவும் (size) அதிகரிக்கின்றது. இது பிளாக்குகளுக்குள் மாறுபாடு இருக்க வாய்ப்பை ஏற்படுத்துகின்றது. பொதுவாக, நடத்துமுறைகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருந்தால் (சுமாராக இருபது அல்லது அதற்குமேல்) இத்திட்டத்தை விட திறனுடைய திட்டங்கள் உள்ளன.

முழுமையும் சமவாய்ப்புத்திட்டத்தில் ஒவ்வொரு நடத்துமுறையும் 10 தடவைகள் திரும்பப் பயன்படுத்திப் பெறும் முடிவை இத் திட்டத்தில் 6 தடவைகள் திரும்பப்பயன் படுத்துவதாலேயே பெறலாம்.

பொதுவாகக் கூறினால், மற்ற எந்தத் திட்டமும் இத் திட்டத்தைப்போல அடிக்கடி உபயோகப்படுத்தப்படுவதில்லை.

சமவாய்ப்புக் கட்டுதிட்ட அமைப்பின் ஆய்வுமுறை

இத்திட்டத்தின் ஆய்வு முறையை விளக்கக் கீழ்க்கண்ட சோதனையை ஆராய்வோம். A, B, C, D, E என்ற ஐந்து வகை தீனிகளின் சிறப்புகளை ஒப்பிட இச் சோதனை நடத்தப்பட்டது. ஒவ்வொரு தொகுதியிலும் உள்ள பன்றிகள் முடிந்தவரை எடை, இனம், வயது போன்றவற்றில் ஒரே மாதிரியாக இருக்குமாறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுப் பரிசோதனையில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. அதாவது தொகுதிகளுக்கிடையே வேறுபாடுகள் இருப்பினும் ஒவ்வொரு தொகுதியினுள்ளும் மாறுபாடு

இன்றி ஒரே மாதிரியாக இருக்குமாறு ஐந்து தொகுதியிலும் உள்ள பன்றிகளுக்கு ராண்டம் முறையில் தீனிகள் ஒதுக்கப்பட்டன. ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குப் பின் ஐந்து தொகுதிகளில் உள்ள பன்றிகளின் எடை அதிகரிப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. முதலில் தீனிகளின் விளைவுகளில் பொதுவாக வேறுபாடுகள் பொருளுடைய வகையில் உள்ளனவா என்பதைச் சோதிக்கலாம். பின்பு விரும்பும் தீனிகளின் விளைவுகளை ஒப்பிட்டுச் சோதனை செய்யலாம்.

அட்டவணை 7.2.3

சமவாய்ப்புக் கட்டுத்திட்ட அமைப்பு

பன்றிகளின் எடை அதிகரிப்புகள் (கிலோ கிராமில்)

A, B, C, D, E—தீனிவகைகள்

தொகுதிகள்					
1	*D* 83	*C* 74	*A* 76	*E* 87	*B* 90
2	*B* 82	*A* 75	*D* 85	*C* 79	*E* 92
3	*E* 78	*D* 82	*B* 75	*A* 81	*C* 66
4	*E* 82	*A* 82	*D* 93	*C* 71	*B* 81
5	*A* 69	*B* 83	*E* 79	*D* 85	*C* 77

இத்திட்டத்திற்கான கணக்கீடு முறைகள் பரவற்படி ஆய்வு இருவழிப்பிரிவு முறையில் உள்ளவைகளே. x_{ij} என்பது i வது $(i=1, 2,...m)$ நடத்துமுறையில் j ஆவது $(j=1, 2,...n)$ தொகுதியில் உள்ள மதிப்பு எனவும்,

$T_i = i$ ஆவது நடத்துமுறையின் மொத்தம்,

$T_j = j$ ஆவது தொகுதியின் மொத்தம்,

$T =$ எல்லா மதிப்புகளின் மொத்தம்

$N = mn$ மொத்த மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை எனவும் கொண்டால்,

மொத்தவர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= S = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$

நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= S_1 = \frac{1}{n} \sum_i T_i^2 - \frac{T^2}{N}$

தொகுதி வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= S_2 = \frac{1}{n} \sum_j T_{\cdot j}^2 - \frac{T^2}{N}$

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= S_e = S - S_1 - S_2$

இவற்றிற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் முறையே,

$$(N-1),\ (m-1),\ (n-1),\ (m-1)\ (n-1)$$

இனி தரப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு இவ்வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைகளைக் காண்போம். அதன் பொருட்டு கொடுக்கப் பட்ட பரிசோதனை முடிவுகளை தீனிவகைகளுக்கு ஏற்ப ஒழுங்கு படுத்தி எழுதலாம்.

அட்டவணை 7.2.4

தீனி வகைகளுக்கேற்ப ஒழுங்கு முறை

		A	B	C	D	E	மொத்தம்
தொகுதிகள்	1	76	90	74	83	87	410
	2	75	82	79	85	92	413
	3	81	75	66	82	78	382
	4	82	81	71	93	82	409
	5	69	83	71	85	79	393
மொத்தம்		383	411	367	428	418	2007
கூட்டிடை		76.6	82.2	73.4	85.6	83.6	80.28

கணக்கீடுகள் :

ஒவ்வொரு மதிப்பிலிருந்தும் 80ஐக் கழித்துவரும் மதிப்புகளைக்கொண்டு கணக்கீடுகள் செய்வது எளிது.

(1) சரியீட்டளவு $= \frac{T^2}{N} = \frac{7^2}{25} = 1.96$

(2) $\sum\sum x_{ij}^2 = (-4)^2 + (-5)^2 + \ldots + (2)^2 + (-1)^2$

$= 1063$

(3) $\frac{1}{n}\sum_i T_i^2 = \frac{(-17)^2 + (11)^2 + (-33)^2 + (28)^2 + (18)^2}{4}$

$= \frac{2607}{4} = 651.75$

(4) $\frac{1}{n}\sum_i T_{\cdot j}^2 = \frac{(10)^2 + (13)^2 + (-18)^2 + (9)^2 + (-7)^2}{4}$

$= \frac{723}{4} = 180.75$

(5) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$S = \sum_i\sum_j x_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$$

$= (2) - (1)$

$= 1061.04$

(6) தீனிவகைகள் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= S_1$

$$= \frac{1}{n}\sum_i T_i^2 - \frac{T^2}{N}$$

$= (3) - (1)$

$= 649.79$

(7) தொகுதிவர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$S_2 = \frac{1}{m} \sum_i T._j^2 - \frac{T^2}{N}$$

$$=(4)-(1)$$

$$=178.79$$

(8) பிழைவர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $=S_e$

$$=S-S_1-S_2$$

$$=(5)-(6)-(7)$$

$$=232.46$$

அட்டவணை 7.2.5

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு
தீனிவகைகள்	4	649.79	162.45	11.18	5% 1%
தொகுதிகள்	4	178.79	44.70	3.08	3.01 4.77
பிழை	16	232.46	14.53		3.01 4.77
மொத்தம்	24	1061.04			

தீனி வகைகளுக்கான F மதிப்பு 1 சதவீத மட்டத்திலும், தொகுதிகளுக்கான F மதிப்பு 5 சதவீத மட்டத்திலும் பொருளுடையனவாக இருக்கின்றன. எனவே தீனி வகைகளிடையே வேறுபாடுகள் உள்ளன என்ற முடிவு ஏற்படுகின்றது.

இனி தீனி வகைகளின் கூட்டிடைகளைச் சோதித்து, எந்த இணைக் கூட்டிடைகளில் வேறுபாடுகள் உள்ளன என்பதை அறியலாம்.

இரு கூட்டிடைகளுக்கிடையே வேறுபாட்டிற்கான தரப் பிழை, $\sqrt{\frac{2s^2}{n}}$-ன் மதிப்பு 2.41. வரையற்ற பாகைகள் 16 கொண்ட 't'ன் 5 சதவீத மதிப்பு 2.12. எனவே.

$$\text{மீச்சிறு பொருளுடை வேறுபாடு} = 2.41 \times 2.12$$

$$= 5.11$$

மீ. பொ. வே.ஐக் கொண்டு விரும்பும் இரு கூட்டிடைகளுக்கிடையே யுள்ள வேறுபாட்டைச் சோதிக்கலாம்.

ஸ்டூடண்டைசுடு வீச்சு Qஐப் பயன்படுத்தி, இணை கூட்டிடைகளில் உள்ள வேறுபாடுகளைச் சோதிக்கலாம். அட்டவணையிலிருந்து, $a=5$, $f=16$க்கு $Q_{.05,5}$—ன் மதிப்பு 4.34 ஆகும். $s_{\bar{x}}$—ன் மதிப்பு 1.71 ஆகும். எனவே,

$$Q_{.05,5}\, s\bar{x} = 4.34 \times 1.71$$

$$= 7.42$$

இரு கூட்டிடைகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடு 7.42 ஐவிட அதிகமாக இருந்தால், வேறுபாடு 5 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இருக்கின்றது. A, D; B, C; C, D; C, E என்ற இணைக் கூட்டிடைகளில் வேறுபாடுகள் பொருளுடையனவாக உள்ளதைக் காணலாம். Q முறையைத் தொடர்ச்சியாகப் பயன்படுத்தி வேறுபாடுகளைச் சோதனை செய்யலாம்.

இனி C தீனி வகையை மற்ற தீனி வகைகளுடன் ஒப்பிட, வகைகள் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம்.

C தீனி வகைக்கும் மற்ற தீனி வகைகளுக்கும் உள்ள ஒப்புமையைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம். ஒப்புமையை A எனக் கொண்டால்,

$$A = a_{11}\, T_1 + a_{12}\, T_2 + a_{13}\, T_3 + a_{14}\, T_4 + a_{15}\, T_5$$

இதில், $\sum_{i=1}^{5} a_{1i} = 0$ T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 என்பன வகைகளின் மொத்தங்களைக் குறிக்கின்றன.

	A	B	C	D	E
வகைகளின் மொத்தங்கள்	383	411	367	428	418
a_1i	1	1	—4	1	1

$$A = 383 + 411 - 4 \times 367 + 428 + 418.$$
$$= 172$$

A ஒப்புமை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= \dfrac{A^2}{n\sum_i a_{1i}^2}$

$$= \frac{172^2}{5(16+1+1+1+1)}$$

$$= \frac{19584}{100}$$

$$= 195.84$$

இதற்குரிய வரையற்ற பாகை = 1

அட்டவணை 7.2. 6

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு
தீனி வகைகள்	4	649.79	...		5% 1%
C க்கும் A+B+D +E-க்கும் ஒப்புமை	1	195.84	195.84	13.48	4.49 8.53
மீதி	3	453.95	...		
பிழை	16	232.46	14.53		

C-க்கும் $A+B+D+E$-க்கும் உள்ள வேறுபாடு 1 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இருக்கின்றது.

A, B, D, E ஆகியவற்றின் கூட்டிடையே C கூட்டிடையுடன் ஒப்பிடுதல்:

m நடத்து முறைகள் இருப்பின் அவற்றின் கூட்டிடைகள் $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\ldots x_m$ ஆகியவற்றுக்கிடையேயான ஒப்புமை

$$A_1 = a_{11}\,\bar{x}_1 + {}_1 + a_{12}\,\bar{x}_2 + \ldots + a_{1p}\,\bar{x}_P$$

இதில் $\sum_{i=1}^{p} a_{1i} = 0$

இவ் வொப்புமையில் எல்லா நடத்துமுறை கூட்டிடைகளும் இருக்கலாம், அல்லது சில கூட்டிடைகளே இருக்கலாம். அதாவது $p \leq m$.

ஒப்புமை A_1–ன் தரப்பிழை $= \sqrt{\sum_i a^2{}_{1i}} \times \sqrt{\frac{s^2}{n}}$

இதில் s^2 = பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி.

இதற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் s^2-க்கு உள்ளதேயாகும்.

n என்பது ஒவ்வொரு கூட்டிடையிலும் அடங்கியுள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையாகும்.

ஒப்புமை A_1ஐச் சோதனையிடுவதற்கான 't'ன்

$$\text{மதிப்பு} = \frac{A_1}{\sqrt{\sum_i a_1{}^2{}_i} \times \sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

இனி, A, B, D, E ஆகியவற்றின் கூட்டிடையையும், C-ன் கூட்டிடையையும் ஒப்பிடலாம்.

ஒப்புமை $A_1 = \frac{1}{4}\bar{x}_1 + \frac{1}{4}\bar{x}_2 - \bar{x}_3 + \frac{1}{4}\bar{x}_4 + \frac{1}{4}\bar{x}_5$

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5$ என்பன முறையே A, B, C, D, E என்பவற்றின் கூட்டிடைகள்,

$$\therefore \quad A_1 = \tfrac{1}{4} \times 76.6 + \tfrac{1}{4} \times 82.2 - 73.4 + \tfrac{1}{4} \times 85.6 + \tfrac{1}{4} \times 83.6$$

$$= 82.0 - 73.4$$

$$= 8.60$$

தரப்பிழை $= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} \times \sqrt{\frac{14.53}{5}}$

$$= \sqrt{1.25} \times \sqrt{2.91}$$

$$= 1.12 \times 1.71$$

$$= 1.92$$

$$t = \frac{8.60}{1.92} = 4.48; \; t_{.01, 16} = 2.921$$

எனவே, A, B, D, E ஆகியவற்றின் கூட்டிடைக்கும், C கூட்டிடைக்கும் உள்ள வேறுபாடு 1 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இருக்கின்றது.

இவ் வேறுபாட்டிற்குரிய 96 சதவீத நம்பிக்கை எல்லைகள்:

$$8.60 \pm 1.92 \times 2.12 = (4.53, 12.67)$$

பரிசோதனைக் கூறு பிளாக்குகளாகப் பிரிக்கப்படுவதால் ஏற்படும் பயில் திறன் (Efficiency)

முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டத்தில் நடத்து முறைகள் பரிசோதனைக் கூறு முழுமையிலும் ராண்டம் முறையில் பயன் படுத்தப்படுகின்றன. சமவாய்ப்புக் கட்டு திட்ட அமைப்பில் பரிசோதனைக் கூறு பல பிளாக்குகளாகப் (ரெப்லிகேசன்களாக) பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு பிளாக்கிலும் நடத்து முறைகள் ராண்டம் முறையில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இவ்வாறு பிளாக்குகளாகப் பிரிக்கப்படுவதால் நடத்து முறைகளை ஒப்

பிடுவதில் எவ்வாறு பரிசோதனைத் திட்டத்தின் திட்பம் (Precision) அதிகரிக்கின்றது என்பதைப் பார்ப்போம்.

இரு திட்டங்களின் பிழை மாறுபாடுகள் முறையே E_1, E_2 எனக் கொண்டால், இரண்டாவது திட்டத்தின் சாய்வு பயில் திறனை E_1/E_2 என்ற விகிதத்தின் மதிப்பு தருகின்றது. இரண்டாவது திட்டத்திலுள்ள ரெப்லிகேசன்களின் எண்ணிக்கை n_2 எனில், இரண்டாவது திட்டத்தின் அளவு திட்பத்தை அடைய முதல் திட்டத்தில் இருக்க வேண்டிய ரெப்லிகேசன்கள் $\frac{E_1}{E_2} \times n_2$ ஆகும்.

சமவாய்ப்புக் கட்டு திட்ட சோதனையின் பரவற்படி ஆய்விலிருந்து அதே அடிப்படைக் கூறுகளில் முழுமையும் சமவாய்ப்பு முறையில் நடத்து முறைகள் பயன்படுத்தப்பட்டிருந்தால் இருக்கக்கூடிய பிழை மாறுபாட்டினைத் தோராயமாக மதிப்பிடலாம்.

முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டத்தில் பிழை மாறுபாடு $\Big\}$ $= E_{c}.\gamma.$

$$E_{C}.\gamma. = \frac{n_b E_b + (n_t + n_e) E_e}{n_b + n_t + n_e}$$

இதில்,

E_b = பிளாக்கு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி.

E_e = பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி.

n_b = பிளாக்கு வரையற்ற பாகைகள்.

n_t = நடத்து முறை வரையற்ற பாகைகள்.

n_e = பிழை வரையற்ற பாகைகள்.

காக்ரனும், காக்சும் எழுதியுள்ள 'செய்முறைத் திட்டங்கள்' (Experimeatal Designs) என்ற நூலில் தரப்பட்டுள்ள மேற்கண்ட சூத்திரத்தைக் கொண்டு சம வாய்ப்புக் கட்டுதிட்ட அமைப்பின் சார்புப் பயில் திறனைக் காணலாம்.

சம வாய்ப்புக் கட்டுத்திட்ட அமைப்பின் சார்புப

$$\text{பயில் திறன்} = \frac{E_c.\ \gamma.}{E_e}$$

$$\frac{E_c.\ \gamma.}{E_e} = \frac{n_b E_b + (n_t + n_e) E_e}{n_b + n_t + n_e} \times \frac{1}{E_e}$$

தீனி வகைகள் பற்றி சம வாய்ப்புக் கட்டுத்திட்ட அமைப்பில்,

$$E_b = 44.70 \qquad E_e = 14.53$$

$$n_b = 4 \qquad n_e = 16 \qquad n_t = 4$$

$$\text{சார்புப் பயில் திறன்} = \frac{4 \times 44.70 + (4 + 16)\ 14.53}{4 + 4 + 16} \cdot \frac{1}{14.53}$$

$$= \frac{19.56}{14.53}$$

$$= 1.35$$

இதே சோதனை முழுமையும் சம வாய்ப்புத் திட்டத்தில் செய்யப்படின், சம வாய்ப்புக் கட்டுதிட்ட அமைப்பில் உள்ள அளவு நடத்துமுறை கூட்டிடைக்கான தரப் பிழையைப் பெற வேண்டியிருக்கும் ரெப்லிகேசன்களின் (பிளாக்குகளின்) எண்ணிக்கை $= 1.35 \times 5 = 6.75 = 7$

மேலேயுள்ள சூத்திரத்தில் பிழை மாறுபாடுகளுக்கான வரையற்ற பாகைகள் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளப்படவில்லை. ஒரே சோதனை இரு திட்ட அமைப்புகளிலும் செய்யப்படும் பொழுது, முழுமையும் சம வாய்ப்புத் திட்டத்தில் பிழை மாறுபாட்டிற்குரிய வரையற்ற பாகைகள், சம வாய்ப்புக் கட்டுதிட்ட அமைப்பில் பிழை மாறுபாட்டிற்குரிய வரையற்ற பாகைகளை விட அதிகமாக இருக்கும். எனவே, நம்பிக்கை இடைவெளிகளைக் கணக்கிடுவதற்கான t மதிப்புகள் சம வாய்ப்புக் கட்டுத்திட்ட அமைப்பில் உள்ளனவற்றை விடச் சிறியனவாக இருக்கும். ஃபிசர் தந்துள்ள கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தில் இது கருதப்பட்டுள்ளது.

$$\left.\begin{array}{l}\text{சார்புச் செய்தியின் அளவு} \\ \text{(Relative amount of information)}\end{array}\right\} = \frac{(n_2+1)\,(n_1+3)}{(n_1+1)\,(n_2+3)} \cdot \frac{E_{c} \cdot \gamma}{E_e}$$

இதில், n_1 = முழுமையும் சம வாய்ப்புத் திட்டத்தில் பிழை மாறுபாட்டிற்கான வரையற்ற பாகைகள்.

n_2 = சம வாய்ப்புக் கட்டு திட்ட அமைப்பில் பிழை மாறுபாட்டிற்கான வரையற்ற பாகைகள்.

தீனி வகைகள் பற்றிய சோதனைக்கு,

$$\text{சார்புச் செய்தியின் அளவு} = \frac{(16+1)\,(20+3)}{(20+1)\,(16+3)} \cdot \frac{19.56}{14.53}$$

$$= \cdot 98 \times 1.35$$

$$= 1.32$$

வரையற்ற பாகைகளுக்காகச் சரி செய்த பின்பு, சார்பு செய்தியின் அளவு அதிகமாக மாறவில்லை. ஆனல், சிறிய சோதனைகளில் வரையற்ற பாகைகளுக்காகச் சரி செய்யப்படு வதால் சார்பு செய்தியின் அளவில் மாற்றம் ஏற்படும்.

தவறிப் போன மதிப்புகளைக் (missing values) கொண்ட சம வாய்ப்புக் கட்டுத்திட்ட அமைப்பின் ஆய்வு

சில சமயங்களில் எதிர்பாராத நிகழ்ச்சிகளால் விவரங்களில் சில தவறிப் போகலாம். வேளாண்மைத் துறை சம்பந்தப்பட்ட பரிசோதனைகளின் போது சில சமயங்களில் அடிப்படைக் கூறுகளில் ஒன்றில் அல்லது அதற்கு மேற்பட்டவைகளில் உள்ள பயிர்களுக்கு நாசம் ஏற்படலாம். இது போன்ற நிகழ்ச்சிகள் மற்ற துறைகளில் செய்யப்படும் பரிசோதனைகளிலும் ஏற்படலாம். விலங்குகள் பயன்படுத்தப்படும் சோதனைகளில், விலங்குகளில் ஒன்றோ அதற்கு மேற்பட்டவைகளோ பரிசோதனைகள் நடக்கும் பொழுதே இறந்து போகலாம். சில வேளைகளில் நடத்து முறைகளைப் பயன்படுத்துவதில் தவறுகள் ஏற்படுவதால் விவரங்கள் தவறிப் போகலாம். பரிசோதனையின் முடிவுகளைக் குறிக்கும் பொழுது தவறுகள் ஏற்படலாம். அல்லது சில முடிவுகள் தவறிப் போகலாம். இவ்வாறு பல காரணங் களில் விவரங்கள் தவறிப் போக வாய்ப்புகள் உள்ளன. தவறிப்

போன விவரங்கள் கொண்ட சம வாய்ப்புக் கட்டுத் திட்டத்தின் ஆய்வு முறையை இங்குக் காண்போம். முழுமையும் சம வாய்ப்புத் திட்டத்தில் தவறிப் போன விவரங்கள் இருப்பின் சமமில்லாத அளவு பிரிவுகளைக் (unequal classes) கொண்ட ஒரு வழிப் பாகுபாட்டு முறையைக் கொண்டு ஆய்வு நடத்தலாம். ஆனால் சம வாய்ப்புக் கட்டு திட்டத்தில் முதலில் தவறிப்போன விவரங்கள் உண்மையிலேயே தவறிப் போனவையா அல்லது நடத்து முறைகளினால் ஏற்பட்ட விளைவா என்பதைத் தெரிந்து கொள்ள வேண்டும். எடுத்துக் காட்டாக, வேளாண்மைத்துறை பரிசோதனைகளில், சில நடத்து முறைகள் பயிர்களுக்கு ஊறு விளைவிக்கக் கூடும். இந்த நடத்து முறைகளால் விளைச்சல் இல்லை எனில், அதை பூச்சியம் விளைச்சல் எனக் கொள்ள வேண்டுமேயன்றி தவறிப் போன விவரமாகக் கொள்ளக் கூடாது.

தவறிப் போன விவரங்களை மதிப்பிடுதல் : சம வாய்ப்புக் கட்டு திட்ட அமைப்பில் முதல் பிளாக்கில் முதல் நடத்து முறைக்குரிய மதிப்பு தவறிப் போயுள்ளதாகக் கொள்வோம். தவறிப் போன மதிப்பை y எனக் கொள்வோம்.

அட்டவணை 7. 2. 7.

நடத்து முறைகள்

		1	2	...	i	...	m	மொத்தம்
	1	y	x_{21}	...	x_{i1}	...	x_{m1}	$T_{.1}'+y$
	2	x_{12}	x_{22}	...	x_{i2}	...	x_{m2}	$T_{.2}$
பிளாக்குகள்		⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	j	x_{1j}	x_{2j}	...	x_{ij}	...	x_{mj}	$T_{.j}$
		⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	n	x_{1n}	x_{2n}	...	x_{in}	...	x_{mn}	$T_{.m}$
மொத்தம்		$T_{1.}'+y$	$T_{2.}$	...	T_i	...	$T_{m.}$	$T'+y$

இவ்வட்டவணையில்,

T_1' = முதல் நடத்து முறையில் தவறிப் போன மதிப்பு நீங்கலாக $(n-1)$ அடிப்படைக் கூறுகளின் மொத்தம்.

$T'_{\cdot 1}$ = முதல் பிளாக்கில் தவறிப் போன மதிப்பு நீங்கலாக $(m-1)$ அடிப்படைக் கூறுகளின் மொத்தம்.

T' = தவறிப் போன மதிப்பு நீங்கலாக $(mn-1)$ மதிப்புகளின் மொத்தம்.

அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குரிய வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகள் பின் வருவன :

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= \sum_i \sum_j x_{ij}^2 + y^2 - \frac{(T' + y)^2}{mn}$

நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= \frac{1}{n} \sum_i T_i^2 + \frac{(T_1.' + y)^2}{n} - \frac{(T' + y)^2}{mn}$

பிளாக்கு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= \frac{1}{m} \sum_j T^2_{\cdot j} + \frac{(T_{\cdot 1}' + y)^2}{m} - \frac{(T' + y)^2}{mn}$

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை = மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை—நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை – பிளாக்கு வர்க்கங்க்ளின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sum_i \sum_j x_{ij}^2 + y^2 - \frac{1}{n} \sum_i T_i^2 - \frac{(T_1.' + y)}{n}$$

$$- \frac{1}{m} \sum_j T_{\cdot j}^2 - \frac{(T_{\cdot 1}' + y)^2}{m} + \frac{(T' + y)^2}{mn}$$

$$= y^2 + \frac{(T' + y)}{mn} - \frac{(T_1.' + y)^2}{n} - \frac{(T_1.' + y)^2}{mn} +$$

yஐக் கொண்டிராத உறுப்புகள்.

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை y-ன் மாறுபாட்டிற்காக இயன்ற அளவு குறைக்கப்படுகின்றது. அதன் பொருட்டு இக்கூட்டுத்தொகை y ஐக் குறித்து வகையிடப்பட்டு பூச்சியத்திற்குச் சமம் எனக்கொள்ளப்படுகின்றது.

$$2y + \frac{2(T' \times y)}{mn} - \frac{2(T'_{\cdot 1} + y)}{n} - \frac{2(T_{\cdot 1}' + y)}{m} = 0.$$

இதிலிருந்து y-ன் மதிப்பைக்காணலாம்.

$$mny + T' + y - m(T'_{1\cdot} + y) - n(T_i \rightarrow y) = 0$$

$$y(mn + 1 - m - n) = m\,T'_{1\cdot} + n\,T'_{\cdot 1} - T'$$

$$y = \frac{m\,T'_{1\cdot} + nT'_{\cdot 1} - T'}{(m-1)\,n - 1)}$$

பொதுவாக, jஆவது பிளாக்கிலுள்ள iஆவது நடத்துமுறையின் மதிப்பு xij தவறியுள்ளதாகக் கொண்டால், அதை மதிப்பிடப்பயன்படும் சூத்திரம்,

$$\hat{x}_{ij} = \frac{m\,T_i'_{\cdot} + n\,T'_{\cdot j} - T'}{(m-1)(n-1)}$$

இதில்,

T_i' = iஆவது நடத்துமுறையில் தவறியுள்ள மதிப்பு நீங்கலாக $(n-1)$ மதிப்புகளின் மொத்தம்.

$Tj.'$ = jஆவது பிளாக்கில் தவறியுள்ள மதிப்பு நீங்கலாக $(m-1)$ மதிப்புகளின் மொத்தம்.

T' = தவறியுள்ள மதிப்பு நீங்கலாக $(mn-1)$ மதிப்புகளின் மொத்தம்.

இந்த சூத்திரத்தைக் கொண்டு கணக்கிடப்படும் மதிப்பு தவறிப்போன மதிப்பின் சிறந்த தோராய மதிப்பாகும். கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பைத் தவறிப்போன மதிப்பாகக் கொண்டு சமவாய்ப்புக்கட்டு திட்ட அமைப்பின் ஆய்வு வழக்கம்போலச் செய்யப்படுகின்றது. ஆனால் பிழைவர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கான வரையற்ற பாகைகளிலிருந்து ஒன்று குறைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, கீழே தரப்பட்டுள்ள சம வாய்ப்புக் கட்டு திட்ட அமைப்புச் சோதனையில், முதல் பிளாக்கிலுள்ள ஐந்தாவது வகை (E), நெல்லின் விளைச்சலின் மதிப்பு தவறிப் போனதாகக் கொண்டு அதனை மதிப்பிட்டுப் பின்பு ஆய்வு நடத்தலாம்.

அட்டவணை 7 2.8

ஆறு பிளாக்குகள் கொண்ட சமவாய்ப்புக்கட்டு திட்ட அமைப்பில் ஐந்து வகை நெல்லின் விளைச்சல்கள் (கி. கிராம்களில்)

பிளாக்குகள்	வகைகள்					மொத்தம்
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
1	50	41	42	56	...	189
2	42	53	44	65	56	260
3	46	40	55	61	53	255
4	40	44	55	59	58	256
5	56	53	47	58	44	258
6	42	48	40	47	60	237
மொத்தம்	276	279	283	346	271	1455

தவறிப்போன மதிப்பின் மதிப்பீடு,

$$\hat{x}_{51} = \frac{5\times 271 + 6\times 189 - 1455}{5 \times 4}$$

$$= \frac{2489 - 1455}{20}$$

$$= \frac{1034}{20} = 51.7$$

$$= 52$$

இனி தவறிப்போன மதிப்பினை 52 ஆகக்கொண்டு கணக்கீடுகள் செய்யலாம்.

கணக்கீடுகள் :

ஒவ்வொரு மதிப்பிலிருந்தும் 50 ஐக் கழித்துவரும் மதிப்புகளுக்குக் கணக்கீடுகள் செய்வது எளிது.

(1) சரியீட்டளவு $= \frac{T^2}{N} = \frac{7^2}{30} = \frac{49}{30} = 1.63$

(2) $\sum_i \sum_j x_{ij}^2 = 0+(-8)^2+(-4)^2+\dots\dots+(-6)^2+(10)^2$

$= 1584$

(3) $\frac{1}{m}\sum_i T_{i\cdot}^2 = \frac{(-24)^2+(-21)^2+(-17)^2+(46)^2+(23)^2}{6}$

$= \frac{3951}{6}$

$= 658.50.$

(4) $\frac{1}{n}\sum_j T_{\cdot j}^2 = \frac{(-9)^2+(10)^2+(5)^2+(6)^2+(8)^2+(-13)^2}{5}$

$= \frac{475}{5}$

$= 95.00$

(5) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$= S = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$

$= (2) - (1)$

$= 1582.37$

(6) வகை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= S_1 = \frac{1}{n} \Sigma T_{j.}^2 - \frac{T^2}{N}$$

$$= (3) - (1)$$

$$= 656.87$$

(7) பிளாக்கு வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= S_2 = \frac{1}{m} \sum_{j} T_{\cdot j}^2 - \frac{T^2}{N}$$

$$= (4) - (1)$$

$$= 93.37$$

(8) பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= S_0 = S - S_1 - S_2$$

$$= (5) - (6) - (7)$$

$$= 832.13$$

அட்டவணை 7.2.9

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வகையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு 5o/o 5o/o
வகைகள்	4	656.87	164.22	3.75	2.90 4.5
பிளாக்குகள்	5	93.37	18.67	0.43	
பிழை	19	832.13	43.80		
மொத்தம்	28	1582.37			

பிழைக்குரிய வரையற்ற பாகைகளிலிருந்து ஒன்று குறைக்கப்பட்டுள்ளதைக் கவனிக்கவும்.

வகைகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடுகள், 5 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையனவாக இருக்கின்றன.

தவறிப்போன மதிப்பைக் கொண்ட நடத்துமுறையின் கூட்டிடைக்கும் மற்றொரு நடத்து முறையின் கூட்டிடைக்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாட்டைச் சோதனை செய்யப் பயன் படுத்தப்படவேண்டிய தரப்பிழை,

$$S = \sqrt{S'_e\left[\frac{2}{n}+\frac{m}{n(n-1)(m-1)}\right]}$$

A நடத்து முறையின் கூட்டிடையை *E* நடத்து முறையின் கூட்டிடையோடு ஒப்பிட வேண்டியிருந்தால்,

$$S = \sqrt{43 \cdot 80\left[\frac{2}{6}+\frac{5}{6(6-1)(5-1)}\right]}$$

$$= 4.03$$

ஆனால், தவறிப்போன மதிப்பைக் கொண்டிராத நடத்து முறைகளில் ஏதாவது இரண்டின் கூட்டிடைகளை ஒப்பிட வேண்டியிருந்தால் தரப்பிழை,

$$S = \sqrt{\frac{2S^2_e}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 43 \cdot 80}{6}}$$

$$= 3 \cdot 80$$

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மதிப்புகள் தவறிப்போய் இருந்தால், அவற்றை மதிப்பிட இதே முறையைக் மேற்கொள்ளலாம். எடுத்துக்காட்டாக x_{11}, x_{12} என்ற இருமதிப்புகள் தவறிப்போய் இருப்பதாகக் கொள்வோம். இவ்விரண்டையும் முறையே y_1, y_2 எனக் கொள்ளலாம். ஒரு மதிப்பு தவறிப்போய் இருந்த பொழுது செய்ததைப் போலவே, y_1, y_2 மாறுபாட்டிற்காகப் பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை இயன்ற அளவு குறைக்கலாம். இரண்டு மதிப்புகள் தவறிப்போயுள்ள சமவாய்ப்புக் கட்டு திட்ட அமைப்பைப் பின் வருமாறு குறிக்கலாம்,

அட்டவணை 7.2.10

நடத்து முறைகள்

	1	2	3	...	i	...	m	மொத்தம்
1	y_1	x_{21}	x_{31}	...	x_{i1}	...	x_{m1}	$T'_{\cdot 1} + y_1$
2	y_2	x_{22}	x_{32}	...	x_{i2}	...	x_{m2}	$T'_{\cdot 2} + y_2$
⋮	⋮							⋮
j	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	...	x_{ij}	...	x_{mj}	$T_{\cdot j}$
⋮								⋮
n	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}	...	x_{in}	...	x_{mn}	$T_{\cdot n}$
மொத்தம்	$T'_{1\cdot} + y_1 + y_2$	$T_{2\cdot}$	$T_{3\cdot}$	...	$T_{i\cdot}$	...	T_m	$T' + y_1 + y_2$

(வரிசைகள்: பிளாக்குகள்)

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sum_i \sum_j x^2_{ij} + y_1^2 + y_2^2 - \frac{(T' + y_1 + y_2)^2}{mn}$$

நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{1}{n} \sum_i T_{i\cdot}^2 + \frac{(T_1.' + y_1 + y_2)^2}{n} - \frac{(T' + y_1 + y_2)^2}{mn}$$

பிளாக்கு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{1}{m} \sum_j T_{\cdot j}^2 + \frac{(T'_{\cdot 1} + y_1)^2}{m} + \frac{T'_{\cdot 2} + y_2)^2}{m} - \frac{(T' + y_1 + y_2)^2}{mn}$$

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$S_e = \sum_i \sum_j x^2_{ij} + y^2_1 + y_2^2 - \frac{1}{n} \sum_i T_i^2 - \frac{(T_1.' + y_1 + y_2)^2}{n}$$

$$- \frac{1}{m} \sum_j T_{\cdot j}^2 - \frac{(T'_{\cdot 1} + y_1)^2}{m} \frac{(T'_{\cdot 2} + y_2)^2}{m} + \frac{(T' + y_1 + y_2)^2}{mn}$$

$$= y^2_1 + y_2^2 + \frac{(T' + y_1 + y_2)^2}{mn} - \frac{(T'_{1\cdot} + y_1 + y_2)^2}{n} - \frac{(T'_{\cdot 1} + y_1)^2}{m}$$

$$- \frac{(T.'_2 + y_2)^2}{m} + y_1, y_2 \text{ இல்லாத உறுப்புகள்.}$$

$$\frac{\partial S_e}{\partial y_1} = 2y \times \frac{2(T' + y_1 + y_2)}{mn} - \frac{2(T^1_{1\cdot} + y_1 + y_2)}{n} - \frac{2(T'_{\cdot 1} + y_1)}{m} = 0$$

$$mny_1 + T' + y_1 + y_2 - m(T'_{1\cdot} + y_1 + y_2) - n(T_{\cdot 1} + y_1) = 0$$

$$y_1(mn + 1 - m - n) - y_2(m - 1) = m\ T'_{\cdot 1} + nT'_{\cdot 1} - T'$$

$$y_1(n-1)(n-1) - y_2(m-1) = m\ T'_{1\cdot} + nT'_{\cdot 2} - T' \ldots\ldots(1)$$

இதேபோல,

$$\frac{\partial S_e}{\partial y_2} = 0 \text{ எனக் கொண்டால்,}$$

$$y_2(m-1)(n-1) - y_1(m-1) = m\ T'_{1\cdot} + n\ T'_{\cdot 2} - T' \ldots\ldots(2)$$

(1) ஐ $(n-1)$ஆல் பெருக்க,

$$y_1(m-1)(n-1)^2 - y_2(m-1)(n-1) = m(n-1)\ T'_{1\cdot} + n(n-1)\ T'_{\cdot 1} - (n-1)\ T'$$

இதை (2) உடன் கூட்ட,

$$y_1\{(m-1)(n-1)^2 - (m-1)\} = m\,n\ T'_{1\cdot} + n(n-1)\ T'_{\cdot 1} + n\ T'_{\cdot 2} - n\ T'$$

$$y_1(n-1)(n-1)\,n = mn\ T'_{1\cdot} + n(n-1)\ T'_{\cdot 1} + n\ T'_{\cdot 2} - n\ T'$$

$$y_1 = \frac{mT'_{1\cdot} + (n-1)\ T'_{\cdot 1} + T'_{\cdot 2} - T'}{(m-1)\ (n-2)}$$

இதேபோல,

$$y_2 = \frac{m\ T'_{1\cdot} + (n-1)\ T'_{\cdot 2} + T'_{\cdot 1} - T'}{(m-1)\ (n-1)}$$

இந்த முறையைக் மேற்கொண்டு பல தவறிப்போன மதிப்புகளின் மதிப்பீடுகளைக் காணலாம். தவறிப் போன மதிப்புகளுக்கான மதிப்பீடுகளைத் தரும் பொது சூத்திரம் காண்பது கடினம். தவறியுள்ள மதிப்புகளுக்குத் தகுந்தவாறு மேலே கூறப்பட்ட முறையில் சூத்திரங்களைக் கண்டுகொள்ளலாம். இதற்குப் பதிலாக யேட்சு கூறியுள்ள தொடர்முறைக் கணிப்பைப் (Iterative method) பயன்படுத்தலாம். இதன்படி y_2-ன் மதிப்பிற்கு அது இருக்கும் பிளாக்கின் கூட்டிடையின் மதிப்பைப் பிரதியிட்டு, y_1-ன் மதிப்பை ஒரு தவறிப்போன மதிப்பிற்கான சூத்திரத்தைக் கொண்டு காணவேண்டும். பிறகு, y_1-ன் இந்த மதிப்பைப் பயன்படுத்தி y_2-ன் மதிப்பைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காணவேண்டும். இவ்வாறே நிலையான மதிப்புகள் வரும் வரைக் கணக்கிடவேண்டும்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள சமவாய்ப்புக் கட்டு திட்ட அமைப்பில் இரண்டு மதிப்புகள் தவறியுள்ளன. அம் மதிப்புகளைச் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தியும், தொடர்முறைக் கணிப்பிலும் காணலாம்.

அட்டவணை 7.2.11

நடத்து முறைகள்

		1	2	3	4	மொத்தம்
	1	...	48	44	50	142
	2	...	36	47	44	127
பிளாக்குகள்	3	39	41	37	47	164
	4	38	42	50	38	168
	5	40	46	45	52	183
	6	47	45	50	55	197
மொத்தம்		164	258	273	286	981

சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி y_1, y_2-ன் மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

$$y_1 = \frac{m\,T_1{}^1. + (n-1)\,T_1{}^1. + T._2{}^1 - T^1}{(m-1)\,(n-2)}$$

$$= \frac{4 \times 164 + 5 \times 142 + 127 - 981}{3 \times 4}$$

$$= 42.67 = 43$$

$$y_2 = \frac{m\,T_1.{}^1 + (n-1)\,T._2{}^1 + T._1{}^1 - T^1}{(m-1)\,(n-2)}$$

$$= \frac{4 \times 164 + 5 \times 127 + 142 - 981}{3 \times 4}$$

$$= 37.67$$

$$= 38$$

இனி தொடர் முறைக் கணிப்பின் மூலம் y_1, y_2–ன் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

2ஆவது பிளாக்கின் கூட்டிடை $\frac{127}{3} = 42.33$ ஐ y_2-ன் மதிப்பாகக் கொள்ள, y_1–ன் முதல் மதிப்பீடு,

$$y_1 = \frac{4 \times 206.33 + 6 \times 142 - 1023.33}{15}$$

$$= 43.60$$

y_1-ன் மதிப்பை 43.60 எனக் கொள்ள, y_2–ன் முதல் மதிப்பீடு,

$$y_2 = \frac{4 \times 207.60 + 6 \times 127 - 1024.60}{15}$$

$$= 37.85$$

y_2-ன் மதிப்பை 37.85 எனக் கொள்ள y_1–ன் இரண்டாவது மதிப்பீடு,

$$y_1 = \frac{4 \times 201.85 + 6 \times 142 - 1018.85}{15}$$

$$= \frac{640.75}{15}$$

$$= 43.38$$

y_1-ன் மதிப்பை 43.38 எனக் கொள்ள y_2-ன் இரண்டாவது மதிப்பீடு,

$$y_2 = \frac{4\times 207.38+6\times 127-1024.38}{15}$$

$$= \frac{567.14}{15}$$

$$= 37.81$$

y_2-ன் இந்த மதிப்பை மறுபடியும் பயன்படுத்த y_1-ன் மதிப்பு மாறுவதில்லை. எனவே, தொடர் கணிப்பை இத்துடன் நிறுத்திக் கொண்டு,

$$y_1 = 43.38 = 43$$

$$y_2 = 37.81 = 38$$

எனக் கொள்ளலாம்.

தவறிப் போன மதிப்புகளுக்கு இவற்றைப் பிரதியிட்டுச் செய்யப்பட்ட கணக்கீடுகளைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணையில் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 9.2.12

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு 5%
நடத்து முறைகள்	3	158.83	52.94	2.94	3.41
பிளாக்குகள்	5	223.50	44.70	2.48	3.02
பிழை	13	234.17	18.01		
மொத்தம்	21	616.50			

பிழைக்கான வரையற்ற பாகைகளிலிருந்து மதிப்பிடப்பட்ட தவறிப் போன மதிப்புகளுக்காக இரண்டு வரையற்ற பாகைகள் கழிக்கப்பட்டுள்ளன.

நடத்து முறைகளுக்கிடையேயும், பிளாக்குகளுக்கிடையே யும் உள்ள வேறுபாடுகள் 5% மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இல்லை என்று அறியலாம்.

3. லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டம்

முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டத்தில் நடத்து முறைகள் பரிசோதனைக் கூறு முழுமையும் உள்ள அடிப்படை கூறுகளுக்கு ராண்டம் முறையில் ஒதுக்கப்படுகின்றன. ஆனால், சமவாய்ப்புக் கட்டுத்திட்ட அமைப்பில் ஒவ்வொரு பிளாக்கிலும் தனித்தனியே ராண்டம் முறையில் அடிப்படை கூறுகளுக்கு நடத்து முறைகள் ஒதுக்கப்படுகின்றன. முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட நடத்து முறை ஒரு குறிப்பிட்ட பிளாக்கில் ஒரு தடவைக்கு மேலும் வரலாம், அல்லது ஒரு தடவைகூட வராமலேயே இருக்கலாம். ஆனால் சமவாய்ப்புக் கட்டு திட்ட அமைப்பில் ஒரு குறிப்பிட்ட நடத்துமுறை ஒவ்வொரு பிளாக் கிலும் தவருது வருகின்றது. அதாவது இத்திட்டத்தில் நடத்து முறைகளை அடிப்படைக் கூறுகளுக்கு ஒதுக்குவதில் ஒரு கட்டுப் பாடு (restriction) இருக்கின்றது. லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டத்தில், நடத்து முறைகளை ஒதுக்குவதில் மேலும் ஒரு கட்டுப்பாடு இருக்கின்றது. எடுத்துக் காட்டாக A, B, C, D, E என்ற நடத்து முறைகள் லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டத்தில் பின்வருமாறு அமையும்:

C	A	E	D	B
B	E	D	C	A
D	B	A	E	C
A	D	C	B	E
E	C	B	A	D

ஒவ்வொரு நடத்துமுறையும் நிரலில் ஒரு முறையும், வரிசை யில் ஒரு முறையும் வந்திருக்கின்றது. ஒவ்வொரு நிரலிலும்,

ஒவ்வொரு வரிசையிலும் நடத்துமுறைகள் யாவும் (A, B, C, D, E) இருக்கின்றன.

அடிப்படைக் கூறுகளைப் பாதிக்கும் முக்கியமான மாறுபாட்டு மூலங்களுக்குப் பொருந்துமாறு நிரல்களையும் வரிசைகளையும் அமைப்பதால், மாறுபாட்டு மூலங்களினால் ஏற்படும் பிழைகள் கட்டுப்படுத்தப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, நிலத்தின் வளம் நிலத்தின் இருபக்கங்களுக்கு இணையாக இருக்கின்றன எனக் கொள்வோம். நிரல்களையும் வரிசைகளையும் இரு வேறு பக்கங்களுக்கு இணையாக அமைத்துச் சோதனை செய்வதால், நிரல்களுக்கு இடையேயுள்ள வளத்தின் வேறுபாடுகளும், வரிசைகளுக்கு இடையேயுள்ள வளத்தின் வேறுபாடுகளும் நடத்துமுறை கூட்டிடைகளின் ஒப்புமையிலிருந்து நீக்கப்படுகின்றன.

லட்டின் சதுரத்தை அமைத்தல்

ஒரு சதுரத்தில் எழுத்துகளோ அல்லது எண்களோ முதல் நிரலிலும் முதல் வரிசையிலும் அகர வரிசையில் (alphabetical order) அமைந்திருந்தால், அது ஆதார சதுரம் (Standard Square) எனப்படுகின்றது. எடுத்துக்காட்டாக 3×3 லட்டின் சதுரத்திற்கு ஒரே ஒரு ஆதார சதுரமே உள்ளது. அது,

A	B	C
B	C	A
C	A	B

4×4 லட்டின் சதுரத்திற்கு நான்கு ஆதார சதுரங்கள் உள்ளன. அவை:

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

A	B	C	D
B	D	A	C
C	A	D	B
D	C	B	A

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B

A	B	C	D
B	A	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A

இதே மாதிரி 5×5 லட்டின் சதுரத்திற்கு ஆதார சதுரங்களை அமைக்கலாம்.

A	B	C	D	E
B	A	D	E	C
C	D	E	A	B
D	E	B	C	A
E	C	A	B	D

A	B	C	D	E
B	C	D	E	A
C	D	E	A	B
D	E	A	B	C
E	A	B	C	D

A	B	C	D	E
B	D	E	A	C
C	E	A	B	D
D	C	B	E	A
E	A	D	C	B

A	B	C	D	E
B	E	A	C	D
C	D	E	A	B
D	C	B	E	A
E	A	D	B	C

இதேபோல 5×5 லட்டின் சதுரத்திற்கு 56 ஆதார சதுரங்கள் உள்ளன.

6×6 லட்டீன் சதுரத்திற்கான 9408 ஆதார சதுரங்களில் ஒரு ஆதார சதுரம் :

A	B	C	D	E	F
B	E	F	A	C	D
C	F	A	B	D	E
D	A	B	E	F	C
E	C	D	F	A	B
F	D	E	C	B	A

லட்டீன் சதுரத்தின் அளவு அதிகரிக்க அதிகரிக்க ஆதார சதுரங்களின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாகின்றன. எடுத்துக் காட்டாக 7×7 லட்டீன் சதுரத்திற்கு ஆதார சதுரங்களின் எண்ணிக்கை 1, 69, 42, 080 ஆகும். 7×7 ஆதார சதுரங் களில் ஒன்று கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

A	B	C	D	E	F	G
B	D	E	F	G	A	C
C	E	F	G	A	B	D
D	F	G	A	B	C	E
E	A	B	C	D	G	F
F	G	A	E	C	D	B
G	C	D	B	F	E	A

லட்டீன் சதுர அமைப்பில் ராண்டம் முறையைப் பயன் படுத்துதல் (Ramdomisation): m நடத்துமுறைகளைச் சோதனை

யிட வேண்டியிருந்தால், $m \times m$ லட்டின் சதுரத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும், $m \times m$ லட்டின் சதுரத்தில் எவ்வளவு சதுரங்கள் அமைக்கமுடியுமோ அவ்வளவு சதுரங்களில் ஏதாவது ஒன்றை ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுத்து சோதனையை நடத்தப்பயன்படுத்தவேண்டும். 2×2 லட்டின் சதுரத்திற்கு இது எளிது. 2×2 லட்டின் சதுரத்திற்கு இரண்டு அமைப்புகள் உள்ளன. அவை :

A	B
B	A

B	A
A	B

இந்த இரண்டு சதுரங்களில் ஏதாவது ஒன்றை ராண்டம் முறையில் தேர்தெடுத்துப் பயன்படுத்தவேண்டும்.

3×3 லட்டின் சதுரத்திற்கு 12 அமைப்புகள் உள்ளன. அவை :

A	B	C
B	C	A
C	A	B

A	B	C
C	A	B
B	G	A

A	C	B
C	B	A
B	A	C

A	C	B
B	A	C
C	B	A

B	C	A
A	B	C
C	A	B

B	C	A
C	A	B
A	B	C

B	A	C
C	B	A
A	C	B

B	A	C
A	C	B
C	B	A

C	B	A
A	C	B
B	A	G

C	B	A
B	A	C
A	C	B

C	A	B
B	C	A
A	B	C

C	A	B
A	B	C
B	C	A

இந்த 12 சதுரங்களில் ஏதாவது ஒன்று பரிசோதனைக்காக ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றது.

3×3 லட்டீன் சதுரத்திற்கு மேற்பட்ட லட்டீன் சதுரங்களின் அமைப்புகளின் எண்ணிக்கைகள் மிக அதிகமாக உள்ளன. 4×4 லட்டீன் சதுரத்திற்கு 576 அமைப்புகள் உள்ளன; 5×5 லட்டீன் சதுரத்திற்கு 1,61,280 அமைப்புகள் உள்ளன. 6×6 லட்டீன் சதுரத்திற்கு 86400×9408 சதுரங்கள் உள்ளன. ஆகவே, ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான வெறொருமுறையைக் கையாள வேண்டியுள்ளது. பரிசோதனைக்கு வேண்டிய லட்டீன் சதுர அமைப்பைப் பெறக் கீழ்க்கண்டமுறை பயன்படுத்தப் படுகின்றது.

2×2, 3×3 லட்டீன் சதுரங்களுக்கு எல்லாவகை சதுர அமைப்புகளையும் எழுதி ஏதாவது ஒன்றை ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுப்பது எளிது. 4×4 லட்டீன் சதுரத்திற்கு, நான்கு ஆதார சதுரங்களிலிருந்து ஒன்றை ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுத்து நிரல்களின் ஒழுங்கையும் (arrangement of columns), வரிசைகளின் ஒழுங்கையும் ராண்டம் முறைப்படுத்த வேண்டும் ராண்டம் முறைப்படுத்த எளிதாக இருக்க இனி *A,B.C,...* என்ற எழுத்துகளை முறையே 1,2,3...என்ற எண்களால் குறிப்பிடலாம். ராண்டம் அட்டவணையைப் பார்க்கத் தொடங்குவதும் ராண்டம் முறையிலேயே இருக்கவேண்டும். கண்களை மூடிக்கொண்டு அட்டவணையின் ஒரு பக்கத்தின் (page) மீது விரலை வைப்பதன் மூலம் இரு எண்களைத் தெர்ந்தெடுக்கலாம். அவ்வெண்கள் 5,22 என இருப்பதாகக் கொள்வோம். இதை 22 நிரலிலுள்ள 5 ஆவது எண்ணிலிருந்து பயன்படுத்த வேண்டும் என்பதைக் குறிப்பதாகக் கொள்ளலாம். அந்த எண் 7 எனக் கொள்வோம். இதை 4 ஆல் வகுக்க மீதி 3. எனவே 3-ஆவது ஆதார சதுரத்தைத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம். இனி இவ்வாதார சதுரத்தின் நிரல்களையும் வரிசைகளையும் ராண்டம் முறைப் படுத்தவேண்டும். தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட சதுரம்,

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	2
4	3	1	1

எனக் கொள்வோம். ரண்டம் அட்டவணையில் ரண்டம் முறையில் தொடங்கி வரிசையாகப்பார்த்து 1,2,3,4, என்ற எண்களை அவை வருகின்ற முறையில் எழுதிக் கொள்ள வேண்டும். அந்த முறை 2,4,1,3, எனக்கொள்வோம். லட்டின் சதுரத்தில் நிரல்கள் அந்த முறையில் அமைக்கப்படுகின்றன.

2	4	1	3
1	3	2	4
4	1	3	2
3	2	4	1

இனி கடைசி மூன்று வரிசைகளின் ஒருங்கை ரண்டம் முறைப்படுத்த வேண்டும். அதற்கு, 1,4,3 என்ற எண்கள் ரண்டம் அட்டவணையில் வருகின்ற முறையில் எழுதவேண்டும். அம் முறை 4,3, 1 எனக் கொண்டால் பரிசோதனைக்குப் பயன்படுத்த வேண்டிய சதுரம் கிடைக்கின்றது. அது,

2	4	1	3
4	1	3	2
3	2	4	1
1	3	2	4

5×5, 6×6, 7×7, 8×8, 9×9, 10×10, 11×11, 12×12 ஆகிய லட்டின் சதுரங்களுக்கான ஆதார சதுரங்கள் மிக அதிக

மாக உள்ளன. ஆகவே, ஃபிசர், யேட்சு ஆகியவர்களால் தயாரித்து வெளியிடப்பட்டுள்ள ஆதார சதுரங்களிலிருந்து ராண்டம் முறையில் வேண்டிய சதுரங்களைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். பின்பு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சதுரம் கீழ்க்கண்டவாறு ராண்டம் முறைப்படுத்தப்படுகின்றது. எடுத்துக்காட்டாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள 6×6 லட்டின் சதுரத்தை ராண்டம் முறைப்படுத்தலாம்.

1	2	3	4	5	6
2	5	6	1	3	4
3	6	1	2	4	5
4	1	2	5	6	3
5	3	4	6	1	2
6	4	5	3	2	1

ராண்டம் அட்டவணையிலிருந்து 1,2,3,4,5,6 என்ற எண்களின் மூன்று வரிசை மாற்றங்களைத் (Permutations) தேர்தெடுக்கவேண்டும். அம் மூன்றுவரிசை மாற்றங்கள், (4,2,6,5,1,3), (2,3,6,5,4,1,), (5,1,2,4,3,6) எனக் கொள்வோம்.

4,2,6,5,1,3, என்ற வரிசையில் நிரல்களை ஒழுங்குபடுத்த,

4	2	6	5	1	3
1	5	4	3	2	6
2	6	5	4	3	1
5	1	3	6	4	2
6	3	2	1	5	4
3	4	1	2	6	5

2, 3, 6, 5, 4, 1 என்ற வரிசைகளை ஒழுங்குபடுத்த

2	6	5	4	3	1
3	4	1	2	6	5
6	3	2	1	5	4
5	1	3	6	4	2
4	2	6	5	1	3
1	5	4	3	2	6

எண்களை ராண்டம் முறைப்படுத்த மூன்ருவது வரிசை மாற்றத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதிக் கொள்கிரும்.

1	2	3	4	5	6
5	1	2	4	3	6

இதைக் கொண்டு, 1ஐ 5 ஆகவும், 2ஐ 1 ஆகவும், 3ஐ 2 ஆகவும், 5ஐ 3 ஆகவும் மாற்றி எழுத வேண்டும் என்பதை அறியலாம். எனவே, பரிசோதனைக்கான முடிவான சதுரம் :

1	6	3	4	2	5
2	4	5	1	6	3
6	2	1	5	3	4
3	5	2	6	4	1
4	1	6	3	5	2
5	3	4	2	1	6

லட்டீன் சதுர சோதனை அமைப்பு : வழக்கமாக லட்டீன் சதுர சோதனை அமைப்பு சதுர வடிவமான பரிசோதனைப் பரப்பில் செய்யப்படுகின்றது. நிரல்களும் வரிசைகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைந்துள்ளன. இவ்வாறு அமைக்கப்படுவதால் இரு போக்குகளில் உள்ள மாறுபாடுகள் (variations) கட்டுப்படுத்தப்படுகின்றன. எடுத்துக் காட்டாக A, B, C, D, E என்ற ஐந்து நடத்து முறைகள் பயன்படுத்தப்படும் லட்டீன் சதுர அமைப்பு பின்வருமாறு அமையும்.

நிரல்கள்

வரிசைகள்

D	B	A	C	E
E	A	C	D	B
B	C	E	A	D
A	E	D	B	C
C	D	B	E	A

மாறுபாடுகள் ஒரே போக்கில் ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்திருப்பதாகத் தோன்றினால் ஒரே நேர்கோட்டில் பிளாக்குகளையும் (வரிசைகள்) நிரல்களையும் அமைக்கும் முறை நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ள மாறுபாடுகளைக் கட்டுப்படுத்துகின்றது. இவ் வமைப்பு முறையில் பிளாக்குகள் வரிசைகளாக உள்ளன; பிளாக்குகளிள்ள நடத்து முறைகளின் ஒழுங்கு நிரல்களாக உள்ளன.

பிளாக்கு I					பிளாக்கு II					பிளாக்கு III					பிளாக்கு VI					பிளாக்கு V				
D	B	A	C	E	E	A	C	D	B	B	C	E	A	D	A	E	D	B	C	C	D	B	E	A

பிளாக்கு I	B
	D
	A
	C
பிளாக்கு II	A
	C
	B
	D
பிளாக்கு III	D
	B
	C
	A
பிளாக்கு IV	C
	A
	D
	B

லட்டீன் சதுர அமைப்பின் சிறப்புகள்

(1) முழுமையும் சம வாய்ப்புத் திட்டம், சம வாய்ப்புக் கட்டுதிட்ட அமைப்பு ஆகியவற்றை லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டம் பயில்திறன் (efficiency) கொண்டது. ஏனெனில், ஒவ்வொரு நடத்து முறையும் நிரலில் ஒரு தடவையும் வருகின்ற மாதிரி அமைக்கப்படுவதால், பரிசோதனைக் கூறின் மாறுபாடுகள் மிகுந்த அளவில் கட்டுப்படுத்தப்படுவதால் பிழை மாறுபாட்டின் அளவு சிறிதாக உள்ளது.

(2) இத் திட்டத்தின் ஆய்வு முறை எளிதாக இருக்கின்றது. விவரங்கள் சில தவறிப் போயிருந்தாலும், ஆய்வு முறை எளிதாகவே இருக்கின்றது.

இத் திட்டத்தில் ரெப்லிகேஷன்களின் எண்ணிக்கை நடத்து முறைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருப்பதால், பொதுவாக 10 நடத்துமுறைகளுக்கு மேற்பட்டிருந்தால் இத் திட்டம் பயன்படுத்தப்படுவதில்லை. நான்கு அல்லது நான்கிற்குக் குறைந்த நடத்துமுறைகளுக்கு, பிழைக்கான வரையற்ற பாகைகள் விரும்பத்தக்க அளவைவிடக் குறைவாக இருக்

கின்றன. அதனால் நான்கு முதல் எட்டு வரையுள்ள நடத்து முறைகளுக்கு லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டம் மிகவும் பயன்படும் திட்டம் என ஃபிசர் கூறுகிறார்.

லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டத்தின் ஆய்வு முறை

கீழ்க்கண்ட குறியீடுகளைக் கொண்டு லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டத்திற்கான பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணையை அமைக்கலாம்.

x_{ijk} = iஆவது j ஆவது வரிசையில் k ஆவது நடத்து முறையைக் கொண்டுள்ள மதிப்பு.

C_i = iஆவது நிரலின் கூட்டுத் தொகை $i = 1, 2 \ldots m$.

R_j = jஆவது வரிசையின் கூட்டுத் தொகை $j = 1, 2 \ldots m$

T_k = kஆவது நடத்து முறையின் கூட்டுத் தொகை $k = 1, 2 \ldots m$

T = கூட்டுத் தொகைகளின் மொத்தம்.

அட்டவணை 7.3.1

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறு பாட்டின் மூலம்	வறையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டு தொகை சராசரி	F மதிப்பு
நிரல்கள்	$m-1$	$\frac{1}{n}\sum_i C_i^2 \quad \frac{T^2}{m^-} = S_e$	$S_c/_{m-1} = S_c'$	S_c'/S_e'
வரிசைகள்	$m-1$	$\frac{1}{m}\sum_j R_j^2 - \frac{T^2}{m^2} = S_r$	$S_r/_{m-1} = S_r'$	S_r'/S_e'
நடத்து முறைகள்	$m-1$	$\frac{1}{m}\sum_k T_k^2 - \frac{T^2}{m^2} = S_t$	$S_t/_{m-1} = S_t'$	S_t'/S_e'
பிழை	$(m-1) \times (m-2)$	$S - S_c - S_r - S_t = S_e$	$\frac{S_e}{(m-1)(m-2} = S_e'$	
மொத்தம்	m^2-1	$\sum_i \sum_{jk} x^2_{ijk} - \frac{T^2}{m^2} = S$		

ஐந்துவகை அவரைகளின் விளைச்சல்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க கீழ்க்கண்ட சோதனை செய்யப்பட்டது. மண்வள வேறுபாடுகளைக் கட்டுப்படுத்த லட்டீன் சதுர அமைப்பு முறை பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. விளைச்சலின் அளவுகள் கிலோ கிராம்களில் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 7·3·2

வரிசைகள்	நிரல்கள் 1	2	3	4	5	மொத்தம்
1	*E* 71	*A* 43	*C* 55	*B* 49	*D* 51	269
2	*D* 63	*E* 94	*B* 69	*A* 52	*C* 70	348
3	*C* 63	*D* 70	*A* 47	*E* 79	*B* 64	323
4	*A* 28	*B* 67	*D* 48	*C* 50	*E* 39	232
5	*B* 41	*C* 76	*E* 89	*D* 71	*A* 51	328
மொத்தம்	266	350	308	301	275	1500

ஐந்துவகை அவரைகளின் விளைச்சல்களில் வேறுபா[illegible] உள்ளனவா என்பதைச் சோதிக்கக் கீழ்க்கண்ட கணக்[illegible] செய்யப்பட்டு பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை அமைக்[illegible]கின்றது.

கணக்கீடுகள் :

(1) சரியீட்டளவு $= \dfrac{T^2}{m^2} = \dfrac{1500^2}{25} = 90{,}000$

(2) $\sum\limits_{i} \sum\limits_{jk} x^2_{ijk} = 71 + 63^2 + \dots \dots \dots + 39^2 + 51^2$

$$= 96120$$

(3) $$\frac{1}{m}\sum_{i} C_i^2 = \frac{266^2 + 350^2 + 308^2 + 301^2 + 275^2}{5}$$

$$= \frac{454346}{5}$$

$$= 90869.20$$

(4) $$\frac{1}{m}\sum_{j} R_j^2 = \frac{269^2 + 348^2 + 323^2 + 232^2 + 328^2}{5}$$

$$= \frac{459202}{5}$$

$$= 91840.40$$

(5) $$\frac{1}{m}\sum_{k} T_k^2 = \frac{221^2 + 290^2 + 314^2 + 303^2 + 372}{5}$$

$$= \frac{461720}{5}$$

$$= 92344.00$$

(6) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= S = \sum_{i} \sum_{j} x^2_{ijk} - \frac{T^2}{m^2}$$

$$= (2) - (1)$$

$$= 6120.00$$

(7) நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$- S_c = \frac{1}{m} \sum_i C_i^2 - \frac{T^2}{m^2}$$

$$= (3) - (1)$$

$$= 869.20$$

(8) வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= S_r = \frac{1}{m} \sum_j R_j^2 - \frac{T^2}{m^2}$$

$$= (4) - (1)$$

$$= 1840.40$$

(9) நடத்து முறை வகை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= S_t = \frac{1}{m} \sum_k T_k^2 - \frac{T^2}{m^2}$$

$$= (5) - (1)$$

$$= 2344.00$$

(10) பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S_e = S - S_c - S_r - S_t$$

$$= (6) - (7) - (8) - (9)$$

$$= 1066.40$$

அட்டவணை 7.3.3.

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு 5% 1%
நிரல்கள்	4	869.20	217.13	2.45	3.26 5.41
வரிசைகள்	4	1840.40	450.10	5.18	3.26 5.41
நடத்து முறைகள் (வகைகள்)	4	2344.00	586.00	6.59	3.26 5.41
பிழை	12	1066.40	88.87		
மொத்தம்	25	6120.00			

ஐந்து வகை அவரைகளின் விளைச்சல்களிடையே வேறுபாடுகள் 1 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையனவாக இருக்கின்றன.

நடத்து முறைகள் (வகைகள்) கூட்டிடைகளை இரண்டிரண்டாக எடுத்துக்கொண்டு அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடுகளை, ஒருவழிப்பாகுபாடு ஆகியவற்றில் சோதித்தவாறே சோதிக்கலாம். வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளை ஒப்புமைகளுக்குத் தகுந்தவாறு பிரித்து ஆய்வு நடத்தலாம்.

லட்டீன் சதுர அமைப்பின் பயில் திறன்

முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டத்துடன் ஒப்பிட லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டத்தின் சார்புப் பயில் திறன் (Relative Efficiency)

$$= \frac{S'_r + S'_c + (m-1).\,S'_e}{(m+1)\,S'_e}$$

இதில்,

S'_r = வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி.

S'_c = நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி

S'_e = பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி

சமவாய்ப்புக் கட்டுதிட்ட அமைப்புடன் ஒப்பிடும் பொழுது லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டத்தின் சார்பு பயில் திறன்:

(i) வரிசைகளைப் பிளாக்குகளாகக் கொண்டு நிரல்கள் கட்டுப்பாடு இல்லாதிருக்கும் சமவாய்ப்புக் கட்டுதிட்டத்துடன் ஒப்பிட லட்டீன் சதுர அமைப்பின் சார்பு பயில் திறன்

$$= \frac{S'_c + (m-1)\, S'_e}{m\, S'_e}$$

(ii) நிரல்களை பிளாக்குகளாகக் கொண்டு வரிசைகள் கட்டுப்பாடு இல்லாதிருக்கும் சமவாய்ப்புக் கட்டுதிட்ட அமைப்புடன் ஒப்பிட லட்டீன் சதுர அமைப்பின் சார்பு பயில் திறன்

$$= \frac{S'_r + (m-1)\, S'_e}{m\, S'_e}$$

அவரை வகைகள் பற்றிய லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டத்தின் சார்புத் திறன்களை கணக்கிடலாம்.

முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டத்துடன் ஒப்பிட சார்பு பயில் திறன்

$$= \frac{460.10 + 217.30 + 4 \times 88.87}{6 \times 88.87}$$

$$= 1.94$$

அதாவது, லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டம் முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டத்தைவிட 94% அதிக திறனுடையதாக கின்றது.

சமவாய்ப்புக் கட்டுதிட்ட அமைப்புடன் ஒப்பிட சார்பு பயில் திறன்:

(1) வரிசைகளைப் பிளாக்குகளாகக் கொண்டு நிரல்கள் கட்டுப்பாடு இல்லாதிருக்கும் சமவாய்ப்புக் கட்டு திட்டத்துடன் ஒப்பிட லட்டீன் சதுர அமைப்பின் சார்பு பயில்திறன்

$$= \frac{217.30 + 4 \times 88.87}{5 \times 88.87}$$

$$= 1.29$$

(ii) நிரல்களைப் பிளாக்குகளாகக் கொண்டு வரிசைகள் கட்டுப்பாடு இல்லாதிருக்கும் சமவாய்ப்புக் கட்டுத்திட்டத்துடன் லட்டீன் சதுர அமைப்பின் சார்பு பயில் திறன்,

$$= \frac{460.10 + 4 \times 88.87}{5 \times 88.87}$$

$$= 1.83$$

தவறிப்போன மதிப்புகளை மதிப்பிடுதல்

சமவாய்ப்புக் கட்டுதிட்ட அமைப்பில் தவறிப்போன மதிப்புகள் பற்றிய பிரிவில் கூறியுள்ளபடி பல காரணங்களினால் மதிப்புகள் தவறிப் போகலாம். தவறிய மதிப்புகளை மதிப்பிட்டு அம் மதிப்பீடுகளைத் தவறிப்போன மதிப்புகளுக்குப் பிரதியிட்டு ஆய்வு நடத்தவேண்டும். n தவறிப்போன மதிப்புகள் மதிப்பிடப்பட்டு பிரதியிடப்பட்டிருந்தால், ஆய்வில் பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கான வரையற்ற பாகைகளிலிருந்து n வரையற்ற பாகைகள் குறைகின்றன.

லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டத்தில் ஓர் அடிப்படைக் கூறின் விளைவு தவறியிருந்தால் அதை மதிப்பிடுவது எளிது. எடுத்துக்காட்டாக $m \times m$ லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டத்தில் 1ஆவது நடத்து முறையைப் பெற்ற முதல் நிரலிலும் முதல் வரிசையிலும் உள்ள மதிப்பு தவறிப் போயுள்ளதாகக் கொள்வோம். அதனை y எனக் குறிப்போம்.

அட்டவணை 7.3.4 நிரல்கள்

வரிசைகள்		1	2	...	i	...	m	மொத்தம்
	1	y	x_{21}	...	x_{i1}	...	x_{m1}	$y + R'_1$
	2	x_{12}	x_{22}	...	x_{i2}	...	x_{m2}	R_2
	3	x_{13}	x_{23}	...	x_{i3}	...	x_{m3}	R_3
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	j	x_{1j}	x_{2j}	...	x_{ij}	...	x_{mj}	R_j
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	m	x_{1m}	x_{2m}	...	x_{im}	...	x_{mm}	R_m
மொத்தம்		$y+C'_1$	C_2	...	C_i	...	C_m	$y + T'$

தவறிப்போன மதிப்பினைக் கொண்ட நடத்து முறையின் மொத்தம் T'_1 எனக் கொள்வோம். மற்ற நடத்து முறைகளின் மொத்தங்கள் முறையே $T_2, T_3, \ldots\ldots T_m$.

இவற்றைப் பயன்படுத்தி வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காணலாம்.

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை = S

$$S = \sum_{ijk} x^2_{ijk} + y^2 - \frac{(T' + y)^2}{m^2}$$

நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை = S_c

$$S_c = \frac{1}{m} \sum_i C^2_i + \frac{1}{m}(C'_1 + y)^2 - \frac{(T' + y)^2}{m^2}$$

வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை = S_r

$$S_r = \frac{1}{m} \sum_j R^2_j + \frac{1}{m}(R'_1 + y)^2 - \frac{(T' + y)^2}{m^2}$$

நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை = S_t

$$S_t = \frac{1}{m} \sum_k T^2_k + \frac{1}{m}(T'_1 + y)^2 - \frac{(T' + y)^2}{m^2}$$

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை = S_e

$$= S - S_c - S_r - S_t$$

$$S_e = \sum_{ijk} x^2_{ijk} + y^2 - \frac{1}{m} \sum_i C^2_i - \frac{1}{m}(C'_1 + y)^2$$

$$- \frac{1}{m} \sum_j R^2_j - \frac{1}{m}(R'_1 + y) - \frac{1}{m} \sum_k T_k^2$$

$$- \frac{1}{m}(T'_1 + y)^2 + 2\frac{(T' + y)^2}{m^2}$$

$$= y^2 + \frac{2(T'+y)^2}{m^2} - \frac{1}{m}\{(C'_1+y)^2+(R'_1+y)^2 + (T'_1+y)^2\}$$

+ y ஐக் கொண்டிராத உறுப்புகள்.

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைத் தவறிப் போன விளைவினைக் குறித்துக் குறைக்க,

$$\frac{\partial S_e}{\partial y} = 2y+\frac{4}{m^4}(T_1+y)-\frac{2}{m}(C^1{}_1+y+R^1{}_1+y+T_1'+y)=0$$

$$y\left(2+\frac{4}{m^4}-\frac{6}{m}\right)+\frac{4T'}{m^2}-\frac{2}{m}\left(C_1{}^1+R^1{}_1+T'_1\right)=0$$

$$y = \frac{\frac{2}{m}(C_1{}^1+R_1{}^1+T_1')-\frac{4T^1}{m^2}}{2+\frac{4}{m^2}-\frac{6}{m}}$$

$$= \frac{2/m^2\{m(C_1'+R_1'+T_1')-2T'\}}{2m/^2\{m^2+2-3m^2\}}$$

$$= \frac{m(C_1'+R_1'+T_1')-2T^1}{(m-1)(m-2)}$$

அதாவது, 1-ஆவது நடத்து முறையைக் கொண்டு 1ஆவது நிரலில் 1-ஆவது வரிசையில் உள்ள மதிப்பினை மதிப்பிடப் பயன்படும் சூத்திரம்

$$y = \frac{m(C_1'+R_1'+T_2')-2T'}{(m-1)(m-2)}$$

பொதுவாக, iஆவது நிரலில் jஆவது வரிசையில் உள்ள kஆவது நடத்து முறையைக் கொண்ட அடிப்படைக் கூறின் மதிப்பு தவறிப் போய் இருப்பின் அதனை மதிப்பிடப் பயன்படும் சூத்திரம்.

தவறிப் போன மதிப்பு x_{ijk}-ன் மதிப்பீடு $= \dfrac{m(C_i'+R_j+T_k')-2T}{(m-1)(m-2)}$

இதில்

C_i' = iஆவது நிரலின் தவறிப்போன நீங்கலாக உள்ள (m—1) மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை.

$R'j$ = jஆவது வரிசையின் தவறிப் போன மதிப்பு நீங்கலாக உள்ள (m—1) மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

T'_k = kஆவது நடத்து முறையின் தவறிப் போன மதிப்பு நீங்கலாக உள்ள (m—1) மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை.

T' = தவறிப் போன மதிப்பு நீங்கலாக உள்ள (m^2—1) மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை.

தவறிப் போன மதிப்பினை மதிப்பிட்டு அதைப் பயன்படுத்தி ஆய்வு நடத்தும் பொழுது பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கான வரையற்ற பாகைகளிலிருந்து ஒன்றைக் குறைத்துக்கொள்ள வேண்டும். அதாவது பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கான வரையற்ற பாகைகள் = $(m-1)(m-2)-1$. எனவே, மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கான வரையற்ற பாகைகள் m^2-1—1=m^2–2. முன்பு போலவே சிறப்பு காண் சோதனையை நடத்த வேண்டும்.

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அடிப்படைக் கூறுகளின் மதிப்புகள் தவறிப் போயிருந்தால், அவற்றிற்கான சூத்திரங்களைத் தனித்தனியே கண்டு அதன்பின் அவற்றை மதிப்பிடலாம். இம்முறையைவிட யேட்சு கூறியுள்ள தொடர் முறைக் கணிப்பு முறையைப் பயன்படுத்தித் தவறிப்போன மதிப்புகளை மதிப்பிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக y_1, y_2 என்ற இரு மதிப்புகள் தவறியுள்ளன எனக் கொள்வோம். இவற்றை மதிப்பிட, இவற்றில் ஏதோ ஒன்றிற்கு (y_2 எனக் கொள்வோம்). தவறிப் போன மதிப்புகள் நீங்கலாக உள்ள (m–2) மதிப்புகளின் சராசரியைப் பிரதியிட்டு, y_1–ன் மதிப்பை ஒரு தவறிப் போன மதிப்பினை மதிப்பிடும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி மதிப்பிடுகிறோம். இவ்வாறு கிடைத்த மதிப்பை y_1-க்குப் பிரதியிட்டு y_2–ன் மதிப்பைச் சூத்திரத்தைக் கொண்டு காண்கிறோம். இவ்வாறே, y_1, y_2 ஆகியவற்றிற்கு நிலையான மதிப்புகள் வரும்வரை செய்கிறோம். வழக்கமாக இரண்டாவது முறை காணும் மதிப்பீடுகள் போதிய அளவில் சரியான மதிப்புகளாக இருப்

பதாக யேட்சு கூறுகிறுர். மிகவும் திருத்தமான மதிப்புகள் வேண்டுமெனில் மூன்ருவது, நான்காவது மதிப்பீடுகளைக்காண வேண்டும்.

ஆய்வு நடத்தும் பொழுது பிழை வர்க்கங்களுக்கான வரையற்ற பாகைகள் $=(m-1)(m-2)-2$.

நெல்லின் விளைச்சல்மீது A, B, C, D, E என்ற உரங்களின் விளைவுகளைச் சோதனையிட செய்யப்பட்ட லட்டீன் சதுர அமைப்புச் சோதனையில் இரண்டு விளைவுகள் தவறியுள்ளன. அவற்றைப் மதிப்பிட்டுப்பின் ஆய்வு நடத்தப்படுகின்றது. அடிப்படைக் கூறுகளின் விளைச்சல்கள் கிலோ கிராம்களில் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 4.1.5

நிரல்கள்

நிரைகள்	1	2	3	4	5	மொத்தம்
1	*D* ...	*A* 6	*C* 26	*E* 23	*B* 14	69
2	*B* 9	*C* 16	*E* 19	*D* 26	*A* 12	82
3	*A* 29	*E* 19	*B* 16	*C* 35	*D* 26	125
4	*C* 9	*B* 16	*D* 27	*A* 21	*E* 27	100
5	*E* 17	*D* 20	*A* 21	*B* ...	*C* 31	80
மொத்தம்	64	77	100	105	110	456

தவறிப் போன மதிப்புகளைத் தொடர்முறைக் கணிப்பு முறையில் மதிப்பிடுதல்:

$x_{45} = \frac{456}{23} = 19.82$ எனக் கொண்டால்

$$x_{ij} = \frac{5\,(64+69+99)-2\times 475.82}{12}$$

$$= 17.36$$

அட்டவணையில் $x_{11} = 17.36$ எனப் பிரதியிட,

$$x_{45} = \frac{5\,(105+80+55) - 2\times 473.36}{12}$$

$$= 21.11$$

அட்டவணையில்,

$x_{45}=21.11$ எனப்பிரதியிட

$$x_{11} = \frac{1160-954.22}{12}$$

$$= 17.15$$

$x_{11} = 17.15$ எனக் கொண்டால்

$$x_{45} = \frac{1200-946.30}{12}$$

$$= 21.14$$

x_{11}, x_{45} ஆகியவற்றின் மதிப்பீடுகள் முறையே 17, 21 எனக் கொள்ளலாம்.

அட்டவணையில் $x_{11}=17$, $x_{45}=21$ எனப் பிரதியிட்டுக் கணக்கீடுகள் செய்து கீழ்க்கண்ட பரவற்படி ஆய்வுஅட்டவணை அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 7.3.6

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு 5%
நிரல்கள்	4	272.24	68.06	1.41	3.48
வரிசைகள்	4	184.24	46.06	0.96	3.48
உர வகைகள்	4	376.24	94.06	1.95	3.48
பிழை	10	481.12	48.11		
மொத்தம்	22	1313.84			

இங்கு நிரல்கள், வரிசைகள் இடையேயுள்ள வேறுபாடுகள் 5% மட்டத்தில் பொருளுடையதாக இல்லை என்று அறிகின்றோம்.

8. பகுதித்திருப்பச் சோதனைகள்

நடத்துமுறைகளைப் பல மட்டங்களில் எடுத்துக்கொண்டு அவற்றைப் பல சேர்வுகளில் (combinations) ஒரே பரிசோதனையில் பயன்படுத்தி விளைவுகளை ஒப்பிட்டாராயலாம். எடுத்துக்காட்டாக ஊட்டச்சோதனைகளால் (feeding experiments) புரதப் பொருளை (Protein), P_0, P_1 என்ற இரு மட்டங்களிலும், மாச்சத்தை (Carbohydrates), C_0, C_1 என்ற இரு மட்டங்களிலும் எடுத்துக்கொண்டு, P_0C_0, P_0, C_1, P_1 C_0, P_1, C_1 என்ற நான்கு சேர்வுகளில் அவற்றின் விளைவுகளை ஒப்பிடலாம். விற்பனைக்காக உணவு வகைகளை அல்லது குடிநீர்மங்களைத் (beverages) தயாரிக்கையில் அவற்றின் கலப்புக் கூறுகளின் (ingredients) அளவுகளை மாற்றுவதால் மணத்திலும் சுவையிலும் மாறுதல் ஏற்படுகின்றது. பெரும்பான்மையோருக்குப் பிடித்தமான மணத்தையும் சுவையையும் நிர்ணயிக்கக்கலப்புக் கூறுகளின் அளவுகளைப் பல மட்டங்களின் சேர்வுகளில் சோதனை செய்யலாம். பயிர்களின் விளைச்சல், நைட்ரசன், பாசுபேட்டு, பொட்டாசியம் ஆகிய உரவகைகளினால் பாதிக்கப்படுகின்றது. விளை நிலத்தில் இச் சத்துக்களைப் பல அளவுகளில் பல சேர்வுகளில் பயன்படுத்துவதால் விளைச்சலில் ஏற்படும் மாறுதல்களை ஒப்பிட்டாராயலாம். இவ்வாறு பல பகுப்புகளின் (factors) பல மட்டங்களின் எல்லாவகைச் சேர்வுகளையும் கொண்ட சோதனை 'பகுதித்திருப்பச் சோதனை' எனப்படுகின்றது. இச் சோதனையின் ஆய்வுமுறையை ∴பிசரும், யேட்சும் நடைமுறையில் அமைத்துத் தந்துள்ளனர்.

a, b என்ற இரு நடத்துமுறைகளை இரு மட்டங்களில் பயன்படுத்துவதாகக் கொள்வோம். a–ன் மட்டங்கள் a_0 a_1; b–ன் மட்டங்கள் b_0, b_1. a_0, a_1, b_0, b_1 என்ற நடத்து முறை மட்டங்களை, a_0, b_0, a_1, b_0, a_0 b_1, a_1 b_1 என்ற நான்கு நடத்துமுறை

சேர்வுகளில் பயன்படுத்தலாம். ஒவ்வொரு நடத்துமுறை சேர்வையையும் நன்னான்கு முறைகள் பயன்படுத்துவதாகக் கொள்வோம். ஆகவே, எல்லா சேர்வுகளும் மொத்தம் 16 அடிப்படைக்கூறுகளில் (units) பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. இவற்றைப் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம் :

$a_0\ b_0$	$a_0\ b_1$	$a_1\ b_0$	$a_1\ b_1$
$a_0\ b_0$	$a_0\ b_1$	$a_1\ b_0$	$a_1\ b_1$
$a_0\ b_0$	$a_0\ b_1$	$a_1\ b_0$	$a_1\ b_1$
$a_0\ b_0$	$a_0\ b_1$	$a_1\ b_0$	$a_1\ b_1$

இதில் முதலில் உள்ள எட்டில் முதல் மட்டத்திலும், இரண்டாவது உள்ள எட்டில் இரண்டாவது மட்டத்திலும் a நடத்துமுறை பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. a முதல் மட்டத்தில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள எட்டு நடத்து முறை சேர்வுகளில் முதல் நான்கில் முதல் மட்டத்திலும், இரண்டாவது நான்கில் இரண்டாவது மட்டத்திலும் b நடத்துமுறை பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. அதாவது முதல் நான்கு நடத்து முறை சேர்வுகள் இரண்டாவது நடத்துமுறை சேர்வுகளிலிருந்து b நடத்துமுறயைப் பயன்படுத்திய முறையில் வேறுபடுகின்றன. ஆகவே, $a_0\ b_0$, $a_0\ b_0$, $a_0\ b_0$, $a_0\ b_0$ என்ற நான்கு நடத்துமுறை சேர்வுகளின் விளைவுகளுக்கும் ஏதாவது வேறுபாடு இருப்பின் அது ராண்டம் வேறு பாடுகளைத் தவிர, b-ன் மட்டம் மாறுபட்டதினால் ஏற்பட்ட வேறுபாடு ஆகும். இதேமாதிரி, $a_1\ b_0$. $a_1\ b_0$, $a_1\ b_0$, $a_1\ b_0$ என்ற நான்கின் விளைவுகளுக்கும் $a_1\ b_1$, $a_1\ b_1$, $a_1\ b_1$, a_1, b_1 என்ற நான்கின் விளைவுகளுக்கும் உள்ள வேறுபாடு b–ன் மட்டம் மாறுபட்டதால் ஏற்பட்டதாகும். எனவே, முதல் எட்டு நடத்துமுறை சேர்வுகளிலிருந்தும், இரண்டாவது எட்டு நடத்துமுறை சேர்வுகளிலிருந்தும் b–ன் விளைவைத் தனித் தனியே மதிப்பிடலாம். அதாவது, பயன்படுத்தப்பட்ட 16 நடத்துமுறை சேர்வுகளையும் பயன்படுத்தி b–ன் விளைவை அறியலாம். இதே முறையில் 16 நடத்துமுறை சேர்வுகளையும் பயன்படுத்தி a-ன் விளைவை அறியலாம். எனவே ஒவ்வொரு நடத்துமுறை சேர்வும் a–ன் விளைவையும் b-ன் விளைவையும் அறிவதற்கான தகவலைத் தருகின்றது.

a–ன் விளைவையும் b–ன் விளைவையும் அறிய தனித்தனி சோதனைகள் செய்யும்பொழுது a, b ஆகியவற்றின் இடை

விளைவு பற்றி அறிந்துகொள்ள இயலாது. b உடன் இருக்கும் பொழுது a-ன் மட்டத்தை அதிகப்படுத்துவது நன்மை பயப்ப தாயும், b இல்லாதபொழுது நன்மை பயக்காததாயும்இருப்பின், அதை அறிந்துகொள்ள b உடன் இருக்கும் பொழுதும் b உடன் இல்லாத பொழுதும் a ஐச் சோதனை செய்யவேண்டும். இதுவே பகுதித் திருப்பச் சோதனையில் செய்யப்படுகின்றது.

முதன்மையான விளைவுகள் (Main effects), **இடைவிளைவு** (Interaction) **ஆகியவற்றின் வரையறைகள்**

எடுத்துக்காட்டாக இருபகுதிகளைக் (factors) கொண்ட சோதனையைக் காண்போம். அம்மோனியம் சல்பேட் உரத்தை இரு மட்டங்களில் (n_0, n_1) இரு நெல்வகைகளுக்கு (v_0, v_1) பயன் படுத்தி ஏற்பட்ட விளைச்சல்களை (கிலோ கிராம்களில்) கீழ்க் கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

அட்டவணை 8.1

உரம்.

		n_0	n_1	விளைவு
வகைகள்	v_0	326	355	29
	v_1	352	386	34
விளைவு		26	31	

அம்மோனியம் சல்பேட் உரத்தின் மட்டத்தை n_0 விருந்து n_1- க்கு மாற்றியதால் விளைச்சலில் முதல் வகையில் (v_0) 29 கிலோ கிராமும், இரண்டாவது வகையில் (v_1) 34 கிலோ கிராமும் அதிகமாகியுள்ளன. இந்த அளவுகள் அம்மோனியம் சல்பேட்டின் சாதாரண விளைவுகளைக் குறிக்கின்றன. நெல்லின் வகை மாறுபாட்டினால் அம்மோனியம் சல்பேட்டின் முதல் மட்டத்தில் (n_0), 26 கிலோ கிராம் அதிகரிப்பும், இரண்டாவது மட்டத்தில் (n_1), 31 கிலோ கிராம் அதிகரிப்பும் ஏற்பட்டுள்ளன. பகுதிகளின் விளைவுகள் ஒன்றை யொன்று சாராதனவாக உள்ளன எனக் கொள்வோம். அப்பொழுது அம்மோனியம் சல்பேட்டின் மட்டங்களின் விளைவுகளை வகை மாறுபாட்டால் மாறுவதில்லை. அதாவது n_0, n_1-ன் விளைவுகள் v_0, v_1-க்கும் ஒரே மாதிரியாக இருக்கின்றன. அதனால் 29 கிலோகிராமும் 34கிலோ கிராமும் ஒரே அளவை மதிப்பிடுகின்றன. இரண்டிற்கும்

உள்ள வேறுபாடு பரிசோதனைப் பிழைகளால் ஏற்பட்டது. எனவே, இவ்விரண்டின் சராசரி அம்மோனியம் சல்பேட்டின் முதன்மையான விளைவு (Main effect) என வழங்கப்படு கின்றது. அம்மோனியம் சல்பேட்டின் முதன்மையான விளைவு $= \frac{29+34}{2} = 31.5$. இதே மாதிரி v_0, v_1-ன் விளைவுகள் n_0, n_1 ஆகியவற்றிற்கு ஒரேமாதிரியாக இருக்கின்றன. எனவே, 26 கிலோ கிராமும், 31 கிலோ கிராமும் ஒரே அளவை மதிப்பிடு கின்றன. இரண்டிற்கும் உள்ள வேறுபாடு பரிசோதனைப் பிழை களால் ஏற்பட்டது. எனவே, இவ்விரண்டின் சராசரி $\frac{26+31}{2} =$ 28.5, வகைகளின் முதன்மையான விளைவு என்று வழங்கப்படு கின்றது.

அம்மோனியம் சல்பேட்டின் மட்டங்களும் நெல்லின் வகை களும் ஒன்றையொன்று சாராது இருந்தால், பரிசோதனையின் முடிவைப் பின்வருமாறு கூறலாம்:

அம்மோனியம் சல்பேட்டை இரண்டாவது மட்டத்தில் பயன்படுத்தியதால் 31.5 கிலோ கிராம் விளைச்சலில் அதிகரித் துள்ளது: இரண்டாவது வகை நெல்லின் விளைச்சல் முதல் வகையை விட 28.5 கிலோ கிராம் அதிகமாக இருக்கின்றது.

பகுதிகள் ஒன்றையொன்று சாராது இருக்கின்றனவா என் பதைப் பரிசோதனையிலிருந்து அறியலாம். வகைகளின் மாறு பாடு, அம்மோனியம் சல்பேட்டின் மட்டங்களின் மாறுபாட்டால் ஏற்படும் விளைவைப் பாதிப்பதாக இருந்தால் 34 கிலோ கிரா மிற்கும் (இரண்டாவது வகையில் உரத்தின் மட்டங்களினால் ஏற் பட்ட விளைவு), 29 கிலோ கிராமிற்கும் (முதல் வகையில் உரத் தின் மட்டங்களினால் ஏற்பட்ட விளைவு) உள்ள வேறுபாடு 34—29 = 5 அப்பாதிப்பைக் குறிக்கின்றது. இந்த வேறுபாடு அம்மோனியம் சல்பேட்டிற்கும் வகைகளுக்கும் உள்ள இடை விளைவு எனப்படுகின்றது. அம்மோனியம் சல்பேட்டின் மட்டங் களின் மாறுபாடு வகைகளின் மாறுபாட்டால் ஏற்படும் விளைவைப் பாதிக்கிறது எனக்கொண்டு 31 கிலோ கிராமிற்கும், 26 கிலோ கிராமிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டை (31–26=5) வகைகளுக்கும் அம்மோனியம் சல்பேட்டிற்கும் உள்ள இடைவிளைவு என்று கூற லாம். இரண்டு இடை விளைவுகளும் ஒன்றையே குறிக் கின்றன.

பகுதித் திருப்பச் சோதனையில் பகுதிகள் (factors) ஆங்கில எழுத்துக்களில் சிறிய எழுத்துக்களாகிய $a, b, c, \ldots$ ஆகியவை

களாலும், பகுதிகளின் மட்டங்கள் சிறிய எழுத்துகளுடன் அடியில் எழுதப்பட்ட எழுத்துகளாலும் (subscirpts) குறிக்கப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக a_i, b_j, c_k,...என்பன a, b, c...ஆகிய பகுதிகளின் i, j, kஆவது மட்டங்களைக் குறிக்கின்றன. பல பகுதிகளின் ஒரு குறிப்பிட்ட சேர்வு a_i b_j c_k...என குறிக்கப்படுகின்றது. $A,B,C,$...ஆகிய பெரிய எழுத்துகள் விளைவுகளைக் குறிக்கின்றன. $A,B,C,$...என்பன முதன்மையான விளைவுகளைக் குறிக்க, AB, AC, BC, ABC,...என்பன இடைவிளைவுகளைக் குறிக்கின்றன. ஒரு பகுதியின் குறைந்த அளவிலான (lowest) அல்லது பூச்சிய மட்டம் என்பது பூச்சியமாகவோ ஒன்றுமற்றதாகவோ இருக்கவேண்டியதில்லை. ஆனால், அது பரிசோதனையில் மிகக் குறைந்த மட்டமாகும். உரங்களின் மட்டங்களைக் குறிக்கையில் 10 கிலோ கிராம் என்பது குறைந்த மட்டம் அல்லது பூச்சிய மட்டத்தைக் குறிக்கலாம்; 30 கிலோ கிராம் முதல் அல்லது மிக அதிகமான மட்டத்தைக் குறிக்கலாம்.

பகுதித்திருப்பச் சோதனையின் சிறப்புகள்

பகுதித் திருப்பச் சோதனையின் சிறப்புகளை அறிந்து கொள்ள, ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் ஒவ்வொரு சோதனை நடத்தும் ஒற்றைப் பகுதி சோதனையோடு பகுதித் திருப்பச் சோதனையை ஒப்பிடுவோம். a-ன் விளைவை அறியும் ஒற்றைப் பகுதி சோதனையில் b-ன் மட்டத்தை நிலையாக வைத்துக் கொண்டு a_0-ம் a_1-ம் ஒப்பிடப்படுகின்றது. எனவே, இப்பரிசோதனையின் நடத்து முறைகள் a_0b_1, a_1b_1 என்பனவாகும் (b-ன் மட்டம் b_1-ல் நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ளது). ஒவ்வொரு நடத்துமுறையும் நான்கு நான்கு அடிப்படைக் கூறுகளில் பயன்படுத்தப்படுவதாகக் கொள்வோம். எனவே 8 அடிப்படைக்கூறுகளிலிருந்து a-ன் விளைவு கணிக்கப் படுகின்றது. a-ன்விளைவு $= a_1b_1 - a_0b_1$. இதே போல b-ன் விளைவை a-ன் மட்டத்தை a_1-ல் (அல்லது a_0) நிலையாக வைத்துக் கொண்டு பரிசோதித்து அறியலாம். b-ன் விளைவு $(a_1b_1 - a_1b_0)$. இது 8 அடிப்படைக் கூறுகளிலிருந்து கணக்கிடப்படுகின்றது. இரண்டு ஒற்றைப் பகுதி சோதனைகளில் மொத்தம் 16 அடிப்படைக்கூறுகள் பயன்படுத்தப் பட்டுள்ளன. 8 அடிப்படைக் கூறுகளிலிருந்து a-ன் விளைவும், மற்ற 8 அடிப்படைக் கூறுகளிலிருந்து b-ன் விளைவும் கணக்கிடப்படுகின்றன. முதல் பரிசோதனையில் b-ன் மட்டம் b_1-ல் நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. b-ன் மட்டம் b_0 ஆக இருந்தால் a-ன் விளைவு எவ்வாறிருக்கும்? இதற்குரிய பதிலை இப்பரிசோதனையிலிருந்து பெற இயலாது. அதேமாதிரி, இரண்டாவது பரிசோதனையில் b-ன் விளைவு a-ன்மட்டம் a_1 எனக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்டுள்ளதால், இப்பரிசோதனையிலிருந்து a-ன் மட்டம் a_0 ஆக இருக்கும்

பொழுது b-ன் விளைவு என்னவாக இருக்கும் எனக் காண இயலாது. b-ன் விளைவு, a-ன் மட்டம் a_0 ஆக இருக்கும் பொழுதும், a_1 ஆக இருக்கும் பொழுதும் சமமாக இருக்குமா அல்லது மாறுபடுமா என்பதையும் அறிய இயலாது. ஆனால், பகுதித் திருப்பச் சோதனையில் இரு பகுதிகளின் இருமட்டங்களின் எல்லாச் சேர்வுகளும் நடத்து முறைகளாகக் கொள்ளப்படுகின்றன. a_0b_0, a_1b_0, a_0b_1, a_1b_1 என்பன நடத்துமுறைகள். ஒவ்வொரு நடத்துமுறையும் நான்கு நான்கு அடிப்படைக் கூறுகளில் பயன்படுத்தப் படுன்றது. எனவே, மொத்தம் 16 அடிப்படைக் கூறுகளில் நடத்துமுறைகள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. a-ன் விளைவைக் காண இந்தப் பதினாறு அடிப்படைக் கூறுகளும் பயன்படுகின்றன. b-ன் விளைவையும் இந்தப் பதினாறு அடிப்படைக்கூறுகளிலிருந்து கணக்கிடலாம். a-க்கும் b-க்கும் உள்ள இடைவிளைவையும் இப்பதினாறு கூறுகளிலிருந்து பெறலாம். ஆனால், ஒற்றைப் பகுதி சோதனைகளில் மொத்தம் 16 அடிப்படைக்கூறுகள் இருப்பினும், a-ன் விளைவைக் காண 8 அடிப்படைக்கூறுகளும் b-ன் விளைவைக்காண 8 அடிப்படைக் கூறுகளும் பயன்படுகின்றன. எனவே, ஒற்றைப் பகுதி சோதனைகள் பகுதித்திருப்பச் சோதனையின் திட்பத்தை அடைய இருமடங்கு அடிப்படைக்கூறுகளைக் கொண்டிருக்க வேண்டும். அவ்வாறு கொண்டிருப்பினும் இடைவிளைவுகளைக் காண இயலாது. சுருக்கமாக, பகுதித்திருப்பச் சோதனையின் நன்மைகளைப் பின்வருமாறு கூறலாம்:

(1) விளைவுகளைக் காண எல்லா அடிப்படைக் கூறுகளும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. குறைந்த அளவு வள ஆதாரங்களை (resources) பயன்படுத்திப் பலதரப்பட்ட நிலைமைகளில் விளைவுகள் மதிப்பிடப்படக் கூடுதலான பகுதிகளைச் சேர்ப்பது நலம் பயக்கும் என ஃபிசரும் யேட்சும் கூறுகின்றனர். எடுத்துக்காட்டாக, உரங்களின் விளைவுகளைப் பரிசோதிக்கும் பொழுது, உழும் ஆழத்தையும் ஒரு பகுதியாகக் கொண்டால், ஆழமாக உழும் பொழுது உரங்களின் விளைவு அதிகரிக்கின்றதா என்பதையும் சோதிக்கலாம். அதாவது பல உழும் ஆழங்களில் உரங்களின் விளைவுகளைக் கண்டறியலாம்.

(2) ஒற்றைப் பகுதி சோதனையில் a-ன் விளைவைக் காண b, c, d ... என்ற மற்ற பகுதிகள் குறிப்பிட்ட மட்டங்களில் நிலையாக இருக்கின்றன. b, c, d...ன் மற்ற மட்டங்களில் a-ன் விளைவை இப் பரிசோதனையில் காண்பதில்லை. ஆனால் பகுதித் திருப்பச் சோதனையில் b, c, d...ன் எல்லா மட்டங்களிலும் a-ன் விளைவு பரிசோதிக்கப் படுகின்றது.

(3) பகுதித் திருப்பச் சோதனைகளில் முதன்மையான விளைவுகளுடன் இடை விளைவுகளையும் கணக்கிடலாம்.

(4) பகுதித் திருப்பச் சோதனை முறையில் அமைந்த நடத்து முறைகளின் தொகுதி முதன்மையான விளைவுகளையும் இடை விளைவுகளையும் மதிப்பிட மிகவும் உகந்தவை.

ஆனல் பகுதிகளைப் பல மட்டங்களில் சோதிக்க எண்ணிக்கையில் மிக அதிகமான நடத்து முறைச் சேர்வுகளைக் கணக்கில் கொள்ள வேண்டியுள்ளது. 8 பகுதிகளை இரண்டிரண்டு மட்டங்களில் சோதிக்கும் பகுதித் திருப்பச் சோதனையில் 256 சேர்வுகளும், 10 பகுதிகளை இரண்டிரண்டு மட்டங்களில் சோதிக்கும் பகுதித் திருப்பச் சோதனையில் 1024 சேர்வுகளும் உள்ளன. ஆயினும், சில விளைவுகளை மதிப்பிட, வேண்டிய சேர்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் குறைக்கும் முறைகள் உள்ளன. நடத்து முறை சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும் பொழுது, ரெப்லிகேசன் அளவு அதிகமாகின்றது. அதனல் சோதனையின் பயில் திறன் குறைகின்றது. முழுமையற்ற பிளாக்குகளின் வேறுபாடுகளுடன் முக்கியமில்லாத விளைவுகளைப் பிரித்துணர முடியாமல் கலப்பதன் மூலம் இக் குறையை நிவர்த்திக்கலாம். முழுமையற்ற பிளாக்கு மொத்த நடத்து முறைச் சேர்வுகளில ஒரு பகுதியையே கொண்டுள்ளது.

1. பகுதித் திருப்பச் சோதனை. 2^n தொடர்:

2^2. பகுதித் திருப்பச் சோதனை:

இச் சோதனையில் இரண்டு பகுதிகள் ஒவ்வொன்றும் இரண்டு மட்டங்களில் சோதிக்கப்படுகின்றன. இரண்டு பகுதிகளை a, b எனவும் அவற்றின் மட்டங்களை a_0, a_1; b_0, b_1 எனவும் கொள்வோம்: நான்கு நடத்து முறைகளின் சேர்வுகளைப் பின் வருமாறு குறிக்கலாம்:

$$a_0 \ b_0; \quad a_1 \ b_0; \quad a_0 \ b_1; \quad a_1 \ b_1$$

b–ன் ஒவ்வொரு மட்டத்திலும், a–ன் மட்டத்தை a_0-லிருந்து a_1–க்கு அதிகரிப்பதால் ஏற்படும் விளைவை மதிப்பிடலாம்.

b_0 மட்டத்தில் a–ன் விளைவு $= a_1 b_0 - a_0 b_0$

b_1 மட்டத்தில் a–ன் விளைவு $= a_1 b_1 - a_0 b_1$

இவ்விரண்டின் சராசரி a-ன் முதன்மையான விளைவாகக் கொள்ளப்படுகின்றது.

a–ன் முதன்மையான விளைவு

$$= A = \frac{1}{2\gamma}[a_1 b_o - a_o b_o + a_1 b_1 - a_o b_1]$$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{2\gamma}[a_1 b_o + a_1 b_1 - a_o b_o - a_o b_1]$$

இதில்,

γ = ஒவ்வொரு நடத்து முறை சேர்வும், பயன் படுத்தப்பட்டிருக்கும் தடவைகள் (ரெப்லி கேசன்கள்)

இவ்வாறே b-ன் முதன்மையான விளைவைக் கணக்கிடலாம்.

a_o மட்டத்தில் b–ன் விளைவு $= a_o b_1 - a_o b_o$

a_1 மட்டத்தில் b–ன் விளைவு $= a_1 b_1 - a_1 b_o$

b-ன் முதன்மையான விளைவு

$$= B = \frac{1}{2\gamma}[a_o b_1 - a_o b_o + a_1 b_1 - a_1 b_o]$$

$$\therefore B = \frac{1}{2\gamma}[a_o b_1 + a_1 b_1 - a_o b_o - a_1 b_0]$$

இடை விளைவு $A B$ =

a_1 மட்டத்தில் b–ன் விளைவு $= a_1 b_1 - a_1 b_0$

a_0 மட்டத்தில் b-ன் விளைவு $= a_0 b_1 - a_0 b_0$

இவ்விரண்டின் வேறுபாட்டின் சராசரி இடை விளைவு $A B$ ஆகும்.

$$\text{இடை விளைவு } A B = \frac{1}{2\gamma}[a_1 b_1 - a_1 b_0 - a_0 b_1 + a_0 b_0]$$

$$A B = \frac{1}{2\gamma}[a_1 b_1 + a_0 b_0 - a_1 b_0 - a_0 b_1].$$

இவ்வாறே இடை விளைவு $B\,A$ ஐக் காணலாம்.

b மட்டத்தில் a-ன் விளைவு $= a_1\, b_1 - a_0\, b_1$

b_0 மட்டத்தில் a-ன் விளைவு $= a_1\, b_0 - a_0\, b_0$

$$\text{இடை விளைவு } B\,A = \frac{1}{2\gamma}[\,a_1\, b_1 - a_0\, b_1 - a_1\, b_0 + a_0\, b_0\,]$$

$$B\,A = \frac{1}{2\gamma}[\,a_1\, b_1 + a_0\, b_0 - a_0\, b_1 - a_1\, b_0]$$

$A\,B = B\,A$ ஆக இருப்பதைக் காணலாம்.

யேட்சும், ஃபிசரும் முதன்மையான விளைவுகளுக்கும் இடை விளைவுகளுக்கும் இயற்கணித சூத்திரங்களைத் தந்துள்ளனர். அவர்கள் பயன்படுத்திய குறியீடுகள்:

$a_0 = 1 \qquad a_0\, b_0 = 1$

$a_1 = a \qquad a_1\, b_0 = a$

$b_0 = 1 \qquad a_0\, b_1 = a$

$b_1 = b \qquad a_1\, b_1 = ab$

(A), (B), (AB) என்பன மொத்தத்தின் அடிப்படையில் விளைவுகளைக் குறிக்க, A, B, AB என்பன அடிப்படைக் கூறின் அடிப்படையில் விளைவைக் குறிக்கின்றன.

$$(A) = (a - 1)\ (b + 1) = a + ab - b - 1$$

$$(B) = (a + 1)\ (b - 1) = b + ab - a - 1$$

$$(AB) = (a - 1)\,(b - 1) = ab - a - b + 1$$

முதன்மையான விளைவுகளையும் இடை விளைவுகளையும் கணக்கிடப் பயன்படும் சூத்திரங்களில் வரும் நடத்து முறை சேர்வுகளின் விளைவுகளுக்கான குறிகளை (+ அல்லது —) கீழ்க் கண்டவாறு அட்டவணையில் குறிக்கலாம்,

அட்டவணை 8.1.1

நடத்து முறைகளின் சேர்வு

விளைவு	$a_0 b_0 = 1$	$a_1 b_0 = a$	$a_0 b_1 = b$	$a\ b_1 = ab$
A	$-$	$+$	$-$	$+$
B	$-$	$-$	$+$	$+$
AB	$+$	$-$	$-$	$+$
மொத்தம்	$+$	$+$	$+$	$+$

இந்த அட்டவணையைக் கொண்டு

$$(B) = a_0 b_1 + a_1 b_1 - a_0 b_0 - a_1 b_0$$

$$= b + ab - 1 - a$$

பரிசோதனைத் திட்டம் (Experimental Design) என்ற நூலில் வால்டர். டி. ஃபெடரர் நடத்துமுறை சேர்வுகளைக் கீழ்க்கண்ட வாறு குறிப்பிடுகிறார்.

$$a_0 b_0 = 0\ 0$$

$$a_0 b_1 = 0\ 1$$

$$a_1 b_0 = 1\ 0$$

$$a_1 b_1 = 1\ 1$$

இனி, $1, a, b, ab$ என்ற நடத்து முறைகளின் மொத்தங்களை முறையே X_1, Xa, Xb, Xab எனக் குறிப்போம்.

இவற்றைக் கொண்டு முதன்மையான விளைவுகள், இடை விளைவு ஆகியவற்றிற்கான வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை களைத் தரும் சூத்திரங்களை எழுதலாம். ஒவ்வொரு நடத்துமுறை சேர்வும் γ தடவைகள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன எனக் கொள்வோம்.

முதன்மையான விளைவு A-க்கான வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{(X_{ab} + X_a - X_1 - X_b)^2}{\gamma\,[1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2]}$$

$$= \frac{(X_{ab} + X_b - X_1 - X_a)}{4\gamma}$$

முதன்மையான விளைவு B-க்கான வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{(X_{ab} + X_b - X_1 - X_a)^2}{4\gamma}$$

இடைவிளைவு AB-க்கான வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= \frac{(X_{ab} + X_1 - X_a - X_b)^2}{4\gamma}$$

2^2 பகுதித் திருப்பச் சோதனையின் ஆய்வு முறையைக் கீழ்க் கண்ட பரிசோதனையின் ஆய்வைக் கொண்டு நன்கு அறிந்து கொள்ளலாம். 2^2 பகுதித் திருப்பச் சோதனை சமவாய்ப்புக் கட்டு திட்ட அமைப்பில் செய்யப்பட்டுள்ளது. a_0, a என்பன அம்மோனியம் சல்பேட்டின் இரு மட்டங்களைக் குறிக்கின்றன. b_0, b_1 என்பன இரு நெல் வகைகளைக் குறிக்கின்றன. விளைச் சல்கள் கிலோ கிராம்களில் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 8.1.2.

2-பகுதித் திருப்பச் சோதனை

பிளாக்குகள்	நடத்துமுறை சேர்வுகள்				மொத்தம்
	a_0b_0	a_0b_1	a_1b_0	a_1b_1	
I	10	21	26	28	85
II	20	11	30	29	90
III	18	16	34	28	96
IV	25	30	20	41	116
V	14	27	26	38	105
மொத்தம்	87	105	139	164	492

இச்சோதனைக்கான வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகள்:

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை = 1330.80.

நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை — 694.00

பிளாக்கு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை = 152.30

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை = 483.50

இனி, நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையை முதன்மையான விளைவு *A*, முதன்மையான விளைவு *B*, இடை விளைவு *AB* ஆகியவற்றிற்கான வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

முதன்மையான விளைவு *A*, அம்மோனியம் சல்பேட்டின் மட்டங்களை ஒப்பிடுகிறது. முதன்மையான விளைவு *B*, நெல்லின் வகைகளை ஒப்பிடுகிறது. இடை விளைவு *AB*, உரத்தின் மட்டங்கள் இருவகைகளிலும் ஒரே அளவிலான விளைவை ஏற்படுத்துகின்றனவா என்பதைத் தெரிவிக்கின்றது.

அட்டவணை 8. 1. 3

நெல்லின் விளைவு

விளைவு	நடத்துமுறை மொத்தங்கள் X_1 87	X_b 105	X_a 136	X_{ab} 164	+ களின் மொத்தம்	— களின் மொத்தம்	விளைவிற்கான மொத்தம்
A	—	—	+	+	300	192	108
B	—	+	—	+	269	223	46
AB	+	—	+	+	251	241	10

$$\left.\begin{array}{r}\text{முதன்மையான விளைவு } A\text{-க்கான} \\ \text{வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை}\end{array}\right\} = \frac{(108)^2}{5(1+1+1+1)}$$

$$= \frac{11664}{20}$$

$$= 583.20$$

முதன்மையான விளைவு B-க்கான வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $\} = \frac{(46)^2}{5(1+1+1+1)}$

$= \frac{2116}{20}$

$= 105.80$

இடைவிளைவுAB-க்கான வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $\} = \frac{(10)^2}{5(1+1+1+)}$

$= \frac{100}{20}$

$= 5.00$

அட்டவணை 8. 1. 4.

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை—2^2 பகுதித் திருப்பச் சோதனை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு	
பிளாக்குகள்	4	152.30	38.08	0.94	3.26	...
நடத்து முறைகள்	3	694.00	231.33	5.73	3.49	5.95
A	1	583.20	583.20	14.44	4.75	9.33
B	1	105.80	105.80	2.62	4.75	
AB	1	5.00	5.00	0.12		
பிழை	12	484.50	40.38			
மொத்தம்	19	1330.80				

அட்டவணையில் முதன்மையான விளைவு A-க்கு F-ன்மதிப்பு 1% அட்டவணை F மதிப்பைவிட அதிகமாக இருப்பதைக் காண

லாம். எனவே, உரத்தின் இரண்டாவது மட்டத்தில் இரு நெல்வகைகளின் விளைச்சல்களுக்கும் முதல் மட்டத்தில் விளைச்சல்களுக்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாடு பொருளுடைய வகையில் இருக்கின்றது. முதன்மையான விளைவு *B* பொருளுடைய வகையில் இல்லை. எனவே, நெல்லின் இருவகைகளிடையே விளைச்சல்களில் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு இல்லை.

முதன்மையான விளைவுகளையும் இடை விளைவையும் 'மீச் சிறு பொருளுடை வேறுபாடு' முறையைப் பயன்படுத்தியும் சோதிக்கலாம்.

$$\left.\begin{array}{l}\text{விளைவுகளின் மொத்தங்களுக்கான}\\ \text{மீச் சிறு பொருளுடை வேறுபாடு}\end{array}\right\} = t_{\cdot 05, f}\, s_t$$

இதில்,

$t_{\cdot 05}, f =$ பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குரிய வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட t–ன் 5 சதவீத மதிப்பு.

$s_t = \sqrt{s^2\ \gamma \sum C_i^2}$ = தரப்பிழை.

s^2 = பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி.

γ = ரெப்ளிகேசன்களின் (பிளாக்குகளின்) எண்ணிக்கை.

C_i = குறிப்பிட்ட ஒப்புமைக்குரிய கெழுக்கள் (Co-efficients).

தரப்பிழை $S_t = \sqrt{40.38 \times 5\,(1+1+1+1)}$

$= 28.42$

$t_{\cdot 05,\ 12} = 2.179$

மீச் சிறு பொருளுடை வேறுபாடு $= 28.42 \times 2.179$

$= 61.93$

A விளைவிற்கான மொத்தம் (108), இதைவிட அதிகமாக இருப்பதைக் காணலாம். *F* சோதனை முடிவும், 't' சோதனை முடிவும் ஒன்றாகவே இருக்கின்றன.

2.2³ பகுதித் திருப்பச் சோதனை

n, p, k என்ற மூன்று வகை உரங்களை (n = நைட்ரஜன், p = பாசுபேட்டு, k = பொட்டாசு) இரண்டிரண்டு மட்டங்களால் பயன்படுத்துவதால் விளைச்சலில் ஏற்படும் விளைவுகளைச் சோதனை செய்வதாகக் கொள்வோம். n, p, k ஆகியவற்றின் மட்டங்கள் முறையே, n_o, n_1; $p_o\ p_1$; k_o, k_1. இவற்றின் நடத்து முறைச் சேர்வுகளைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$n_o\ p_0\ k_o$	i	000
$n_1\ p_o\ k_o$	n	100
$n_o\ p_1\ k_0$	p	010
$n_1\ p_1\ k_o$	np	110
$n_o\ p_0\ k_1$	k	001
$n_1\ p_o\ k_1$	nk	101
$n_0\ p_1\ k_1$	pk	011
$n_1\ p_1\ k_1$	npk	111

n-ன் விளைவைக் கணக்கிட p-ன் இரு மட்டங்களிலும் k-ன் இரு மட்டங்களிலும் அதன் விளைவைக் காண வேண்டும்.

$p_0\ k_0$-ல் n-ன் விளைவு $= n_1\ p_o\ k_0 - n_0\ p_0\ k_o$

$p_0\ k_1$-ல் n-ன் விளைவு $= n_1\ p_0\ k_1 - n_o\ p_0\ k_1$

$p_1\ k_0$-ல் n-ன் விளைவு $= n_1\ p_1\ k_0 - n_0\ p_1\ k_0$

$p_1\ k_1$-ல் n-ன் விளைவு $= n_1\ p_1\ k_1 - n_0\ p_1\ k_1$

மேலே குறிப்பிட்ட நான்கின் சராசரி முதன்மையான விளைவு N ஆகும். ஒவ்வொரு நடத்துமுறை சேர்வும் γ அடிப்படைக் கூறுகளில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்வோம்.

முதன்மையான விளைவு

$$N = \frac{1}{4\gamma} [n_1 p_0 k_0 - n_0 p_1 k_0 + n_1 p_0 k_1 - n_0 p_1 k_1$$

$$+ n_1 p_0 k_0 - n_0 p_1 k_0 + n_1 p_1 k_1 - n_0 p_1 k_1]$$

$$= \frac{1}{4\gamma} [n_1 p_0 k_0 + n_0 p_1 k_1 + n_1 p_1 k_0 + n_1 p_1 k_1$$

$$- n_0 p_0 k_0 - n_0 p_0 k_1 - n_0 p_1 k_1 - n_0 p_1 k_1]$$

இதையே பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$N = \frac{1}{4\gamma} [n + n k + n p + n p k - k - p - p k - 1]$$

$$= \frac{1}{4\gamma} [(n - 1) (p + 1) (k + 1)]$$

p-ன் முதன்மையான விளைவு P :

$n_0 k_0$-ல் p-ன் விளைவு $= n_1 p_1 k_0 - n_0 p_0 k_0$

$n_1 k_0$-ல் p-ன் விளைவு $= n_1 p_1 k_0 - n_1 p_0 k_0$

$n_0 k_1$-ல் p-ன் விளைவு $= n_0 p_1 k_0 - n_0 p_1 k_1$

$n_1 k_1$-ல் p-ன் விளைவு $= n_1 p_1 k_1 - n_1 p_0 k_1$

முதன்மையான விளைவு

$$P = \frac{1}{4\gamma} [n_0 p_1 k_0 - n_1 p_1 k_0 + + n_0 p_1 k_1 + n_1 p_1 k_1]$$

$$- n_0 p_0 k_0 - n_1 p_0 k_0 - n_1 p_0 k_1 - n_1 p_0 k_1]$$

$$P = \frac{1}{4\gamma} [p + np + pk + npk - 1 - n - k - nk]$$

$$= \frac{1}{4\gamma} (n + 1) [(p - 1) (k + 1)]$$

k-ன் முதன்மையான விளைவு K

$n_0 p_0$-ல் k-ன் விளைவு $= n_0 p_0 k_1 - n_0 p_0 k_0$

$n_1 p_0$-ல் k-ன் விளைவு $= n_1 p_0 k_0 - n_1 p_0 k_0$

$n_0 p_1$-ல் k-ன் விளைவு $= n_0 p_1 k_1 - n_0 p_1 k_0$

$n_1 p_1$-ல் k-ன் விளைவு $= n_1 p_1 k_1 - n_1 p_1 k_0$

முதன்மையான விளைவு

$$K = \frac{1}{4\gamma} [n_0 p_0 k_1 + n_0 p_0 k_1 + n_1 p_1 k_1 + n_1 p_1 k_1$$

$$- n_0 p_0 k_0 - n_1 p_0 k_0 - n_0 p_1 k_0 - n_1 p_1 k_0$$

$$= \frac{1}{4\gamma} [k + n k + n p k - 1 - n - p - n p]$$

$$= \frac{1}{4\gamma} [(n + 1) (p + 1) (k - 1)$$

இடை விளைவு NP

$p_0 k_0$-ல் n-ன் விளைவு $= n_1 p_0 k_0 - n_0 p_0 k_0$

$p_0 k_1$-ல் n-ன் விளைவு $= n_1 p_0 k_1 - n_p p_0 k_1$

p_0 மட்டத்தில் k_0, k_1-ன் சராசரியாக n-ன் விளைவு $\Big\} = \frac{1}{2\gamma} [n_1 p_0 k_0 - n_0 p_0 k_0$

$$+ n_1 p_0 k_1 - n_0 p_0 k_1]$$

$p_1 k_0$-ல் n-ன் விளைவு $= n_1 p_1 k_0 - n_0 p_0 k_1$

$p_1 k_1$-ல் n-ன் விளைவு $= n_0 p_1 k_1 - n_0 p_1 k_1$

p_1 மட்டத்தில் k_0, k_1-ன் சராசரியாக n-ன் விளைவு $\Big\} = \frac{1}{2\gamma} [n_1 p_1 k_0 - n_0 p_1 k_0$

$$+ n_1 p_1 k_1 - n_0 p_1 k_1]$$

n-ன் இந்த இரு விளைவுகளும் வேறுபட்டு இருக்கும். இவ்விரு n விளைவுகளுக்குள்ள வேறுபாட்டில் பாதியை n, p ஆகியவற்றின் இடை விளைவு என்கிறோம்.

$$\text{இடை விளைவு } NP = \frac{1}{4\gamma}\,[n_1p_1k_o - n_op_1k_o + n_1p_1k_1 - n_op_1k_1$$

$$- (n_1p_ok_o - n_op_ok_o + n_1p_ok_1 - n_op_ok_1)]$$

$$= \frac{1}{4\gamma}[n_1p_1k_o + n_1p_1k_1 + n_op_ok_o + n_op_ok_1$$

$$- n_op_1k_o - n_op_1k_1 - n_1p_ok_o - n_1p_ok_1]$$

$$= \frac{1}{4\gamma}\,[nd + npk + 1 + k - p - pk - n - nk]$$

$$NP = \frac{1}{4\gamma}\,[(n-1)(p-1)(k-1)]$$

இடை விளைவு Nk

$$\left.\begin{array}{r}k_o \text{ மட்டத்தில் } p_o\,p_1\text{-ன் சராசரியாக}\\ n\text{-ன் விளைவு}\end{array}\right\} = \frac{1}{2\gamma}\,[n_1p_ok_o - n_op_ok_o$$

$$+ n_1p_1k_1 - n_op_1k_o]$$

$$\left.\begin{array}{r}k_1 \text{ மட்டத்தில் } p_o,\,p_1\text{,ன் சராசரியாக}\\ n\text{-ன் விளைவு}\end{array}\right\} = \frac{1}{2\gamma}\,[n_1p_ok_1 - n_op_ok_1$$

$$+ n_1p_1k_o - n_op_1k_1]$$

$$\text{இடை விளைவு } Nk = \frac{1}{4\gamma}\,[n_1p_ok_1 + n_1p_1k_1 + n_op_ok_o + n_op_1k_o$$

$$- n_op_ok_1 - n_op_1k_1 - n_1p_ok_o - n_1p_1k_o]$$

$$= \frac{1}{4\gamma}\,[n\,k + npk + 1 + p - k - pk - n - np\,]$$

$$= \frac{1}{4\gamma}\,[\,(n-1)\,(p+1)\,(k-1)\,]$$

இடை விளைவு Pk

k_o மட்டத்தில் n_o, n_1-ன் சராசரியாக p-ன் விளைவு $= \frac{1}{2\gamma}[n_o p_1 k_o - n_o p_o k_o + n_1 p_1 k_o - n_1 p_o k_o]$

k_1 மட்டத்தில் n_o, n_1-ன் சராசரியாக p-ன் விளைவு $= \frac{1}{2\gamma}[n_o p_1 k_1 - n_o p_o k_1 + n_1 p_1 k_1 - n_1 p_o k_1]$

இடை விளைவு $Pk = \frac{1}{4\gamma}[n_o p_1 k_1 + n_1 p_1 k_1 + n_o p_o k_o - n_1 p_0 k_0 - n_0 p_0 k_1 - n_1 p_0 k_1 - n_o p_1 k_o - n_1 p_1 k_o]$

$$= \frac{1}{4\gamma}[pk + npk + 1 + n - k - nk - p - np]$$

$$= \frac{1}{4\gamma}[(n+1)(p-1)(k-1)]$$

இடை விளைவு NPk

k_0 மட்டத்தில் இடை விளைவு NP-க்கும் k_1 மட்டத்தில் இடை விளைவு NP-க்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் பாதி இடை விளைவு NPk எனப்படுகின்றது.

k_o மட்டத்தில் இடை விளைவு காண:

$p_o k_0$-ல் n-ன் விளைவு $= n_1 p_0 k_o - n_0 p_0 k_0$ ... ... (1)

$p_1 k_0$-ல் n-ன் விளைவு $= n_1 p_1 k_0 - n_o p_1 k_0$ ... ... (2)

k_o மட்டத்தில் இடை விளைவு NP (2) − (1) $= \frac{1}{2\gamma}[n_1 p_1 k_0 + n_0 p_1 k_o - n_1 p_0 k_0 + n_0 p_o k_0]$

இதே போல k_1 மட்டத்தில் இடை விளைவு

$$NP = \frac{1}{2\gamma}[n_1 p_1 k_1 + n_o p_o k_1 - n_o p_1 k_1 - n_1 p_o k_1$$

இடை விளைவு $NPk = \frac{1}{2}$ [k_1 மட்டத்தில் இடை விளைவு NP

— k_0 மட்டத்தில் இடை விளைவு NP]

$$= \frac{1}{4\gamma} [n_1p_1k_1 + n_0p_0k_1 - n_0p_1k_1 - n_1p_0k_1$$

$$-(n_1 p_1 k_0 - n_0 p_1 k_0 - n_1 p_0 k_0 + n_0 p_0 k_0)]$$

$$= \frac{1}{4\gamma} [n_1p_1k_1 + n_0p_0k_1 + n_0p_1k_0 + n_1p_0k_0$$

$$-n_0p_1k_1 - n_1p_0k_1 - n_1p_1k_0 - n_0p_0k_0]$$

$$NPk = \frac{1}{4\gamma} [npk + k + p + n - pk - nk - pn - 1]$$

$$= \frac{1}{4\gamma} [(n-1)(p-1)(k-1)$$

k_0 மட்டத்தில் இடை விளைவு NP, k_1 மட்டத்தில் இடை விளைவு NP இருப்பதைக் காணலாம். இதுகாறும் பார்த்த விளைவுகளுக்கான சூத்திரங்கள்.

$$N = \frac{1}{4\gamma} [(n-1)(p+1)(k+1)]$$

$$P = \frac{1}{4\gamma} [(n+1)(p-1)(k+1)$$

$$NP = \frac{1}{4\gamma} [(n-1)(p-1)k+1)$$

$$k = \frac{1}{4\gamma} [(n+1)(p+1)(k-1)]$$

$$Nk = \frac{1}{4\gamma} [(n-1)(p+1)(k-1)]$$

$$PK = \frac{1}{4\gamma} [(n+1)(p-1)(k-1)]$$

$$NPK = \frac{1}{4\gamma} [(n-1)(p-1)(k-1)]$$

முதன்மையான விளைவுகளையும் இடை விளைவுகளையும் கணக்கிடப் பயன்படும் சூத்திரங்களில் வரும் நடத்துமுறை சேர்வுகளின் விளைவுகளுக்கான குறிகளை (+ அல்லது −) கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

அட்டவணை 8.2.1

நடத்துமுறைகளின் சேர்வு

விளைவு	$n_0 p_0 k_0$ 1	$n_0 p_0 k_0$ n	$n_0 p_1 k_0$ p	$n_1 p_1 k_0$ np	$n_0 p_0 k$ k	$n_1 p_0 k_1$ nk	$k_0 p_1 k_1$ pk	$n_1 p_1 k_1$ npk
N	−	+	−	+	−	+	−	+
P	−	−	+	+	−	−	+	+
NP	+	−	−	+	+	−	−	+
K	−	−	−	−	+	+	+	+
NK	+	−	+	−	−	+	−	+
PK	+	+	−	−	−	−	+	+
NPK	−	+	+	−	+	−	−	+
மொத்தம்	+	+	+	+	+	+	+	+

இவ்வட்டவணையை எளிதில் அமைக்கலாம். குறிப்பிட்ட முதன்மையான விளைவுகளுக்கான குறிகளை அமைக்க, அக் குறிப்பிட்ட முதன்மையான விளைவு இரண்டாவது மட்டத்தில் பயன்படுத்தப்பட்டிருக்கும் இடங்களில் எல்லாம் +ம், மற்ற இடங்களில் —ம் கொள்ளவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, முதன்மையான விளைவு k க்கு, k, nk, pk, npk ஆகியவற்றில் + வரும்; மற்ற இடங்களில் — வரும். இடைவிளைவுகளின் குறிகளைக்காண, அந்தந்தப் பகுதிகளின் குறிகளைப் பெருக்கி எழுதவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக *PK*-க் குரிய குறிகள் (அட்டவணையைப் பார்க்க): − × −; − × −; + × −; + × −; − × +, − × +; + × +; + × +. அதாவது +, +, —, —, —, —, +, +. இதேபோல மற்றவைக்கும் காணலாம்.

1, n, p, np, k, nk, pk, npk ஆகிய நடத்துமுறைகளின் மொத்தங்கள் முறையே X_1, X_n, X_p, X_{np}, X_k, X_{nk}, X_{pk}, X_{npk} எனக் கொண்டு விளைவுகளுக்குரிய வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

விளைவு	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.
N	$\frac{1}{8\gamma}[X_n+X_{np}+X_{nk}+X_{npk}-X_1-X_p-X_k-X_{pk}]^2$
P	$\frac{1}{8\gamma}[X_p+X_{np}+X_{pk}+X_{npk}-X_1-X_n-X_k-X_{nk}]^2$
NP	$\frac{1}{8\gamma}[X_{np}+X_{npk}+X_k+X_1-X_p-X_{pk}-X_n+X_{nk}]^2$
K	$\frac{1}{8\gamma}[X_k+X_{nk}+X_{pk}+X_{npk}-X_1-X_n-X_p-X_{np}]^2$
NK	$\frac{1}{8\gamma}[X_{nk}+X_{npk}+X_1+X_p-X_k-X_{pk}-X_n-X_{np}]^2$
PK	$\frac{1}{8\gamma}[X_{pk}+X_{npk}+X_1+X_n-X_p-X_k-X_{nk}-X_{np}]^2$
NPK	$\frac{1}{8\gamma}[X_{npk}+X_n+X_p+X_k-X_{np}-X_{nk}-X_{pk}-X_1]^2$

விளைவுகளின் மொத்தங்களை யேட்சு முறையைப் பயன் படுத்தி எளிதில் காணலாம்.

யேட்சு முறை :

(1) நடத்துமுறை சேர்வுகள் ஒழுங்குமுறையில் எழுதப்படு கின்றன. 1, n, p, k என்ற எழுத்துகள் முறையாக வருகின் றன. ஓர் எழுத்தை எழுதிய பிறகு அதற்கடுத்து அவ்வெழுத்து முந்தைய எழுத்துகளுடன் ஏற்படுத்தும் சேர்வுகளையும் எழுத வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, 1, n, p என்ற எழுத்து களுக்கு அடுத்தபடியாக np வரும்; அதற்கு அடுத்து k வரும்; அதற்கடுத்து nk, pk, npk என்ற சேர்வுகள் வருகின்றன. எனவே நடத்துமுறை சேர்வுகளின் ஒழுங்குமுறை : 1, n, p, np, k, nk, pk, npk நடத்துமுறை சேர்வுகளுக்குரிய மொத்தங்கள் அடுத்து எழுதப்படுகின்றன.

(2) முதல் நிரலில் மேற்பாதியில் நடத்துமுறை மொத்தங் களை இணையிணையாக எடுத்து மொத்தத்தை எழுத வேண்டும்.

கீழ்ப்பாதியில் ஒவ்வோர் இணையின் இரண்டாவது மதிப்பி லிருந்து முதல் மதிப்பைக் கழித்து எழுதவேண்டும்.

(3) இதே முறையை முதல் நிரலுக்கு மேற்கொண்டால் இரண்டாவது நிரலிலிருந்து மூன்ருவது நிரலை எழுதவேண்டும். இந்த மூன்ருவது நிரலில் வரும் மதிப்புகள் விளைவுகளின் மொத் தங்கள் ஆகும். முதல் மதிப்பு மொத்தக் கூட்டுத்தொகையைக் குறிக்கின்றது. அடுத்துவரும் மதிப்புகள் முதலில் நடத்து முறை சேர்வுகள் எழுதியுள்ள ஒழுங்கில் விளைவுகளின்மொத்தங் களைக் குறிக்கின்றன.

அதாவது 2, 3...ஆவது மதிப்புகள் முறையே (N), (P), (NP), (k), (Nk), (Pk), (NPk).

அட்டவணை 8.2.2

மதிப்புகள்

சிகிச்சை	மொத்தம்	நிரல் I	நிரல் II	நிரல் III	விளைவுகளின் மொத்தம்
1	x	$X_1+x_n=S_1$	S_1+S_2	$S_1+S_2+S_3+S_4$	மொத்தம்
n	x_n	$X_p+x_{np}=S_2$	S_3+S_4	$S_5+S_6+S_7+S_8$	(N)
p	x_p	$X_k+x_{nk}=S_3$	S_5+S_6	$S_2-S_1+S_4-S_3$	(P)
np	x_{np}	$X_{1k}+X_{npk}=S_4$	S_7+S_8	$S_6-S_5+S_8-S_7$	(NP)
k	x_k	$X_n-X_1=S_5$	S_2-S_1	$S_3+S_4\ S_1-S_2$	(k)
nk	x_{nk}	$X_{np}-X_p=S_6$	S_4-S_3	$S_7+S_8-S_5-S_6$	(Nk)
pk	x_{pk}	$X_{nk}-X_k=S_7$	S_6-S_5	$S_4-S_3-S_2+S_1$	(Pk)
npk	x_{npk}	$X_{npk}-X_{pk}=S_8$	S_8-S_7	$S_8-S_7-S_6+S_5$	(NPk)

யேட்சு முறையைக் கீழ்க்கண்ட 2^3 பகுதித் திருப்பச் சோதனைக்குப் பயன்படுத்துவோம். n, p, k முறையே நைட் ரஜன், பாசுபரசு, பொட்டாசியம் உரங்களைக் குறிக்கின்றன. இவ்வுரங்கள் ஒவ்வொன்றும் இரண்டு மட்டங்களில் பயன் படுத்தியதில் ஒரு குறிப்பிட்ட தானியத்தின் விளைச்சல்கள் ஒவ்வோர் அடிப்படைக் கூறுக்கும் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 8.2.3

தானியத்தின் விளைச்சல்

நைட்ரஜன்	பாசுபரசு	பொட்டாசியம்	பிளாக்குகள் 1	2	3	4	5	நடத்துமுறை மொத்தம்
n_0	p_0	k_0	12	20	10	13	15	70
		k_1	14	21	19	18	23	95
	p_1	k_0	19	18	24	14	20	95
		k_1	25	23	28	22	19	117
n_1	p_0	k_0	16	25	21	20	18	100
		k_1	24	30	27	19	21	121
	p_1	k_0	25	30	21	29	29	134
		k_1	29	38	35	32	34	168
மொத்தம்			164	205	185	167	179	900

யேட்சு முறைப்படி விளைவுகளின் மொத்தங்களைக் கணக்கிட அட்டவணை அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 8.2.4

விளைவுகளின் மொத்தங்கள்

நடத்து முறை	மொத்தம்	நிரல் I	நிரல் II	நிரல் III	விளைவுகளின் மொத்தம்
1	70	170	399	900	மொத்தம்
n	100	229	501	146	(N)
p	95	216	69	128	(P)
np	134	285	77	34	(NP)
k	95	30	59	102	(K)
nk	121	39	69	8	(NK)
pk	117	26	9	10	(PK)
npk	168	51	25	16	(NPK)

முதன்மையான விளைவு N வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{(146)^2}{5\times 8} = \frac{21316}{40}$$

$$= 532.90$$

P வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= \frac{(128)^2}{5\times 8}$

$$= \frac{16384}{40}$$

$$= 409.60$$

NP வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= \frac{(34)^2}{40}$

$$= \frac{1156}{40}$$

$$= 28.9$$

K வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= \frac{(102)^2}{40}$

$$= \frac{10404}{40}$$

$$= 260.10$$

NK வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= \frac{(8)^2}{40}$

$$= \frac{64}{40}$$

$$= 1.60$$

PK வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= \frac{(10)^2}{40}$

$$= \frac{100}{40}$$

$$= 2.50$$

NPK வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= \frac{(16)^2}{40}$

$$= \frac{256}{40}$$

$$= 6.40$$

விளைவுகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளின் மொத்தம் நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கு சமமாக வருகின்றதா எனச் சரிபார்க்கலாம். மேலே கணக்கிடப் பட்டிருப்பவைகளின் கூட்டுத் தொகை = 1242.00.

நடத்து முறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{(70)^2+(100)^2+\dots+(168)^2}{5}$$

$$- \frac{(900)^2}{40}$$

$$= \frac{107460}{5} - 20250.00$$

$$= 21492.00 - 20250.00$$

$$= 1242.00$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= 21920.00 - 20250.00$

$$= 1670.00$$

பிளாக்கு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= 20384.54 - 20250.00$

$$= 134.50$$

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= 293.50$

அட்டவணை 8.2.5

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை — 2^3

பகுதிச் திருப்பச் சோதனை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு 5%	1%
பிளாக்கு	4	134.50	33.63	3.21	2.71	4.07
நடத்து முறை	7	1242.00	177.43	16.93	2.36	3.36
N	1	532.90	532.90	50.86	4.20	7.64
P	1	409.90	409.60	39.08		
NP	1	28.90	28.90	2.76		
K	1	260.10	260.90	24.82		
NK	1	1.60	1.60			
PK	1	2.50	2.50			
NPK	1	6.40	6.40			
பிழை	28	293.50	10.48			
மொத்தம்	39	1670.00				

அட்டவணையிலிருந்து முதன்மையான விளைவுகள் N, P, K மூன்றும் 1 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையனவாக இருப்பதைக் காணலாம். இரண்டாவது மட்டங்களில் உரங்களின் விளைவுகள் முதல் மட்டங்களில் இருப்பதைவிடக் குறிப்பிடத்தக்க அளவில் அதிகமாக இருக்கின்றன என்பதை இது தெரிவிக்கின்றது.

$$\left.\begin{array}{r}\text{விளைவுகளின் மொத்தங்களுக்கான}\\ \text{மீச் சிறு பொருளுடை வேறுபாடு}\end{array}\right\} = t_{.05f}\,st$$

$$st = \sqrt{10.48 \times 5 \times 8}$$

$$= 20.47$$

$$t_{.05, 28} = 2.048$$

மீச் சிறு பொருளுடை வேறுபாடு $= 20.47 \times 2.048$

$$= 41.92$$

இந்த மதிப்பைக் பயன்படுத்தியும் சோதனை செய்யலாம்.

3:2⁴ பகுதித் திருப்பச் சோதனை

2^4 பகுதித் திருப்பச் சோதனையில் $a, b, c, d,$ என்ற பகுதிகள் இரண்டிரண்டு மட்டங்களில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அவை யாவன: $a_0, a_1; b_0, b_1; c_0, c_1; d_0, d_1$ இவற்றிற்கான நடத்து முறை சேர்வுகள் பின்வருமாறு குறிக்கப்படுகின்றன.

$a_0\, b_0\, c_0\, d_0$	1	0000
$a_1\, b_0\, c_0\, d_0$	a	1000
$a_0\, b_1\, c_0\, d_0$	b	0100
$a_1\, b_1\, c_0\, d_0$	$a\, b$	1100
$a_0\, b_0\, c_1\, d_0$	c	0010
$a_1\, b_0\, c_1\, d_0$	$a\, c$	1010
$a_0\, b_1\, c_1\, d_0$	$b\, c$	0110
$a_1\, b_1\, c_1\, d_0$	$a\, b\, c$	1110
$a_0\, b_0\, c_0\, d_1$	d	0001
$a_1\, b_0\, c_0\, d_1$	$a\, d$	1001
$a_0\, b_1\, c_0\, d_1$	$b\, d$	0101
$a_1\, b_1\, c_0\, d_1$	$a\, b\, d$	1101

$a_0\, b_0\, c_1\, d_1$	$c\, d$	0011
$a_1\, b_0\, c_1\, d_1$	$a\, b\, c$	1011
$a_0\, b_1\, c_1\, d_1$	$b\, c\, d$	0111
$a_1\, b_1\, c_1\, d_1$	$a\, b\, c\, d$	1111

முதன்மையான விளைவுகளையும், இடை விளைவுகளையும் தரும் சூத்திரங்கள் :

$$A = \frac{1}{8\,\gamma}\,[(a-1)\,(b+1)\,(c+1)\,(d+1)]$$

$$B = \frac{1}{8\,\gamma}\,[(a+1)\,(b-1)\,(c+1)\,(d+1)]$$

$$AB = \frac{1}{8\,\gamma}[(a-1]\,(b-1)\,(c+1)\,(d+1)]$$

$$C = \frac{1}{8\,\gamma}\,[(a+1)\,(b+1)\,(c-1)\,(d+\,)]$$

$$AC = \frac{1}{8\,\gamma}\,[(a-1)\,(b+1)\,(c-1)\,(d+1)]$$

$$BC = \frac{1}{8\,\gamma}\,[(a+1)\,(b-1)\,(c-1)\,(d+1)]$$

$$ABC = \frac{1}{8\,\gamma}\,[(a-1)\,(b-1)\,(c-1)\,(d+1)]$$

$$D = \frac{1}{8\,\gamma}\,[(a+1)\,(b+1)\,(c+1)\,(d-1)]$$

$$AD = \frac{1}{8\,\gamma}\,[(a-1)\,(b+1)\,(c+1)\,(d-1)]$$

$$BD = \frac{1}{8\,\gamma}\,[(a+1)\,(b-1)\,(c+1)\,d-1)]$$

$$ABD = \frac{1}{8\,\gamma}\,[(a-1)\,(b-1)\,(c+1)\,(d-1)]$$

$$CD = \frac{1}{8\gamma}[(a+1)(b+1)(c-1)(d-1)]$$

$$ACD = \frac{1}{8\gamma}[(a-1)(b+1)(c-1)(d-1)]$$

$$BCD = \frac{1}{8\gamma}[(a+1)(b-1)(c-1)(d-1)]$$

$$ABCD = \frac{1}{8\gamma}[(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)]$$

யேட்சின் முறையைப் பயன்படுத்தி 2^3 பகுதிச் சோதனையில் கூறியுள்ளபடி முதன்மையான விளைவுகள் இடை விளைவுகள் ஆகியவற்றின் மொத்தங்களைக் கணக்கிடலாம்.

விளைவுகளுக்கான வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளை 2^3 பகுதித் திருப்பச் சோதனையில் உள்ள முறையின்படியே கணக்கிடலாம். எடுத்துக் காட்டாக,

முதன்மையான விளைவு *A*-ன் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை,

$$= \frac{[(A)]^2}{\gamma \times 16}$$

இதில் γ = ரெப்ளிகேசன்களின் எண்ணிக்கை. வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் கணக்கிட்டு பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை அமைத்து தரப்பட்ட விவரங்களை ஆராயலாம்.

4.3^2 பகுத் திருப்பச் சோதனை

3^2 பகுதித் திருப்பச் சோதனையில் 2 பகுதிகள் (factors) ஒவ்வொன்றும் மூன்று மட்டங்களில் (levels) பயன்படுத்தப்படுகின்றன. எடுத்துக் காட்டாக, நைட்ரஜன், பாசுபேட்டு உரங்கள் மூன்று மட்டங்களில் பயன்படுத்தப்படுவதாகக் கொள்வோம். நைட்ரஜனின் மூன்று மட்டங்கள் n_0, n_1 n_2; பாசுபேட்டின் மூன்று மட்டங்கள் p_0, p_1, p_2. இவற்றைக் கொண்ட நடத்து முறைச் சேர்வுகள் ஒன்பது உள்ளன. அவை : $n_0 p_0$, $n_1 p_0$, $n_2 p_0$, $n_0 p_1$, $n_1 p_1$, $n_2 p_1$, $n_0 p_2$, $n_1 p_2$, n_2, p_2.

n முதல் மட்டத்தில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள நடத்துமுறை சேர்வுகளின் மொத்தம் $(n)_0 = n_o p_o + n_o p_1 + n_o p_2$.

n இரண்டாவது மட்டத்தில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள நடத்து முறை சேர்வுகளின் மொத்தம் $(n)_1 = n_1 p_o + n_1 p_1 + n_1 p_2$.

n மூன்றுவது மட்டத்தில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள நடத்து முறை சேர்வுகளின் மொத்தம் $(n)_2 = n_2 p_o + n_2 p_1 + n_2 p_2$

இதே போல,

$$(p)_o = n_o p_0 + n_1 p_o + n_2 p_0$$

$$(p)_1 = n_o p_1 + n_1 p_1 + n_2 p_1$$

$$(p)_2 = n_o p_2 + n_1 p_2 + n_2 p_2$$

விளைவு N-ன் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$N = \frac{(n)_0^2 + (n)_1^2 + (n)_2^2}{3\,\gamma} - \frac{[(n)_o + (n)_1 + (n)_2]^2}{9\,\gamma}$$

விளைவு P-ன் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$P = \frac{(p)_o^2 + (p)_1^2 + (p)_2^2}{3\gamma} - \frac{[(p)_o + (p)_1 + (p)_2]^2}{9\,\gamma}$$

இவற்றில் γ = ஒவ்வொரு நடத்து முறை சேர்வும் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள தடவைகள்.

இவ் விளைவுகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் வரையற்ற பாகைகள் 2. இவற்றை மேலும் இரண்டிரண்டாகப் பிரிக்கலாம்.

இரு மட்டங்கள் கொண்ட பகுதித் திருப்பச் சோதனையில் ஒரு பகுதியின் விளைவைக் காண, அந்தப் பகுதியின் இரண்டாவது மட்ட விளைவிலிருந்து முதல் மட்ட விளைவு கழிக்கப்பட்டது. ஆனால் 3^2 சோதனையில் ஒரு பகுதி மூன்று மட்டங்களில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. ஒரு பகுதிக்கு இரண்டு விளைவுகள் உள்ளன. எடுத்துக் காட்டாக, முதல் விளைவு நைட்ரஜனை முதல் மட்டத்திலிருந்து இரண்டாவது மட்டத்திற்கு அதிகரிப்பதால் ஏற்படும் விளைவு. இரண்டாவது மட்டத்

திலிருந்து மூன்றுவது மட்டத்திற்கு அதிகரிப்பதால் ஏற்படும் விளைவு. $(n_1 - n_0)$, $(n_2 - n_1)$ என்பன அவ் விளைவுகள். இவ் விரண்டின் கூட்டுத் தொகையை நைட்ரஜனின் சராசரி விளைவாகக் கொள்ளலாம். இவ் விளைவு நைட்ரஜனின் ஒருபடி விளைவு (linear effect) எனப்படுகின்றது.

எனவே,

நைட்ரஜனின் ஒரு படி விளைவு $= N_l$

$$= [n_2 - n_1) + (n_1 - n_0)]$$

$$= (n_2 - n_0).$$

n_1-லிருந்து n_2-க்கு மட்டம் அதிகரிக்கும் பொழுது ஏற்படும் விளைவிற்கும் n_0-லிருந்து n_1-க்கு அதிகரிக்கும் பொழுது ஏற்படும் விளைவிற்கும் உள்ள வேறுபாடு நைட்ரஜனின் இரு படி விளைவு எனப்படுகின்றது.

நைட்ரஜனின் இரு படி விளைவு (quadratic effect)

$$N_q = [n_2 - n_1) - (n_1 - n_0)$$

$$= (n_2 - 2\,n_1 + n_0)$$

இவ்வாறே,

பாசுபேட்டின் ஒரு படி விளைவு $= P_l = (p_2 - p_0)$

பாசுபேட்டின் இரு படி விளைவு $= P_q = (p_2 - 2\,p_1 + p_0)$

3^2 சோதனைக்கு 4 இடை விளைவுகளை வரையறுக்கலாம் :

$$N_l\,P_l = (n_2 - n_0)\,(p_2 - p_0)$$

$$N_q\,P_l = (n_2 - 2\,n_o + n_0)\,(p_2 - p_0)$$

$$N_l\,P_q = (n_2 - n_0)\,\,(p_2 - 2\,p_1 + p_0)$$

$$N_q\,P_q = (n_2 - 2\,n_1 + n_0)\,(p_2 - 2\,p_1 + p_0)$$

இவை ஒவ்வொன்றிற்குமான வரையற்ற பாகை ஒன்று.

இவ் விளைவுகளுக்கான வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளுக் காணும்போது தகுந்த வகுக்கும் எண்களால் (divisor) இவற்றை வகுக்க வேண்டும்.

N_l விளைவின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= \frac{[N_l]^2}{3(1^2+1)^2\gamma}$

$$= \frac{[N_l]^2}{6\gamma}$$

P_l விளைவின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $= \frac{[P_l]^2}{6\gamma}$

N_q விளைவின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{[N_q]^2}{3(1^2+2^2+1^2)\gamma}$$

$$= \frac{[N_q]^2}{18\gamma}$$

P_q விளைவின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{[P_q]^2}{18\gamma}$$

$N_l\ P_l$ விளைவின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= \frac{[N_l\ P_l]^2}{(1^2+1^2)(1^2+1^2)\gamma}$$

$$= \frac{[N_l\ P_l]^2}{4\gamma}$$

$N_q\ P_l$ விளைவின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{[N_q\ P_l]^2}{(1^2+2^2+1^2)\ (1^2+1^2)\gamma}$$

$$= \frac{[N_q\ P_l]^2}{12\gamma}$$

$N_l\ P_q$ விளைவின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{[N_l\ P_q]^2}{(1^2+1^2)(1^2+2^2+1^2)\gamma}$$

$$= \frac{[N_l\ P_q]^2}{12\gamma}$$

$N_q\ P_q$ விளைவின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{[N_q\ P_q]^2}{(1^2+2^2+1^2)(1^2+2^2+1^2)^2\gamma}$$

$$= \frac{[N_q\ P_q]^2}{36\gamma}$$

எடுத்துக்காட்டாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு மேற்கூறிய விளைவுகளைக் கணக்கிடலாம். n_0, n_1, n_2 என்பன நைட்ரஜனின் மூன்று மட்டங்களையும், p_0, p_1, p_2 என்பன பாசுபேட்டின் மூன்று மட்டங்களையும் குறிக்கின்றன. ஒரு குறிப்பிட்ட தானியத்தின் விளைச்சல்கள் 6 பிளாக்குகளில் தரப்பட்டுள்ளன. விவரங்கள் வருமாறு :

அட்டவணை 8.4.1

தானியத்தின் விளைச்சல்

பிளாக்குகள்	நடத்துமுறைகள்									மொத்தம்
	n_0p_0	n_1p_0	n_2p_0	n_0p_1	n_1p_1	n_2p_1	n_0p_2	n_1p_2	n_2p_2	
I	40	52	39	42	41	48	35	38	62	397
II	37	35	55	29	56	65	44	43	38	402
III	20	44	37	45	39	41	30	64	57	377
IV	25	31	60	36	63	57	51	47	45	415
V	29	49	45	50	46	62	46	57	43	427
VI	30	32	40	30	42	51	50	48	41	364
மொத்தம்	181	243	276	232	287	324	256	297	286	2382
கூட்டிடை	30.17	40.50	46.00	38.67	47.83	54.00	42.67	49.50	47.67	45.04

அட்டவணை 8.4.2

உரங்களின் ஒவ்வொரு மட்டத்திற்கும் ஆன மொத்தங்கள்

பாசு பேட்டு	நைட்ரஜன் n_0	n_1	n_2	மொத்தம்
p_0	181	243	276	700
p_1	232	287	324	843
p_2	256	297	286	839
மொத்தம்	669	827	886	2382

மொத்தவர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை = 5991·33

பிளாக் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை = 304·22

நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை = 2376.66

பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை = 3310.45

நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையை, நைட்ரஜனின் விளைவு, பாசுபேட்டின் விளைவு, நைட்ரஜன் பாசுபேட் ஆகியவற்றிற்கான இடைவிளைவு எனப் பிரிக்கலாம்.

N விளைவு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை,

$$= \frac{(n)_0^2 + (n)_1^2 + (n)_2^2}{3\gamma} - \frac{[(n)_0 + (n)_1 + (n)_2]^2}{9\gamma}$$

$$= \frac{(669)^2 + (827)^2 + (886)^2}{3 \times 6} - \frac{(2382)^2}{9 \times 6}$$

$$= \frac{1916486}{18} - 105072{\cdot}67$$

$$N = 1398.77$$

P விளைவு வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= \frac{(p)_0^2 + (p)_1^2 + (p)_2^2}{3\gamma} - \frac{[(p)_0 + (p)_1 + (p)_2]^2}{9\gamma}$$

$$= \frac{(700)^2 + (843)^2 + (839)^2}{18} - \frac{(2382)^2}{54}$$

$$= 736.77$$

NP இடைவிளைவு $= 2376.66 - 1398\ 77 - 736.77$

$= 241.12$

N விளைவு, N_l (N-ன் ஒருபடி விளைவு), N_q (N-ன் இருபடி விளைவு) என இரண்டாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. இதே போல P விளைவு, P_l, P_q என இரண்டாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. இடை விளைவு NP, $N_l P_l$ $N_q P_l$, $N_l P_q$, $N_q P_q$ என நான்கு பகுதி களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.

அட்டவணை 8.4.3

ஒருபடி இருபடி விளைவுகளைக் கணக்கிடுதல்

	N_l $n_2 - n_0$	N_q $n_2 - 2n_1 + n_0$		P_l $p_2 - p_0$	P_q $p_2 - 2p_1 + p_0$
p_0	95	— 29	n_0	75	— 27
p_1	92	— 18	n_1	54	— 34
p_2	30	— 52	n_2	10	— 86
மொத்தம்	217 (N_l)	—99(N_q)	மொத்தம்	139 (P_l)	— 147 (P_q)
	—65($N_l P_l$)	—23($N_q P_q$)		—65($N_l P_l$)	— 59 ($N_l P_q$)
	—59($N_l P_q$)	—45 ($N_q P_q$)		—23($N_q P_l$)	— 45 ($N_q P_q$)

மதிப்புகளின் விளக்கங்கள் :

உரங்களின் ஒவ்வொரு மட்டத்திற்கும் மொத்தங்களைத் தரும் அட்டவணையைப்பயன்படுத்தி மேலேயுள்ள அட்டவணை தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. n_2 நிரலில் உள்ள மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் அவற்றிற்கு ஒத்த n_0 நிரலில் உள்ள மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் கழிக்க, N_l நிரலில் உள்ள மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன. $276-181=95$; $324-232=92$; $286-256=30$ இதேபோல P_l நிரலிலுள்ள மதிப்புகளைப் பெறலாம். $256-181=75$; $297-243=54$; $286-276=10$. N_q நிரலிலுள்ள மதிப்புகளைப்பெற n_2, n_0 நிரலிலுள்ள மதிப்புகளைக்கூட்டி n_1 நிரலிலுள்ள மதிப்பின் இருமடங்கைக் கழிக்க வேண்டும். N_q நிரலிலுள்ள முதல் மதிப்பு $=276+181-2\times 243= -29$. இதேபோல மற்ற இருமதிப்புகளையும் பெறலாம். P_q நிரலிலுள்ள மதிப்புகளை இதே முறையைப்பயன்படுத்திப் பெறலாம். முதல் மதிப்பு $= 256+181-2\times 232= -27$.

N_l நிரலிலுள்ள மூன்று மதிப்புகளின் மொத்தம் N_l விளைவைத்தருகின்றது. N_q நிரலிலுள்ள மதிப்புகளின் மொத்தம் N_q விளைவாகும்.

P_l, P_q நிரலிலுள்ள மதிப்புகளின் மொத்தங்கள் முறையே P_l, P_q விளைவுகள் ஆகும்.

N_l P_l விளைவைப் பெற, N_l நிரலில், மூன்றாவது மதிப்பிலிருந்து முதல் மதிப்பைக் கழிக்க வேண்டும். அதாவது 30 95 $= -65$.

N_l P_q விளைவைப் பெற, N_l நிரலில், முதல் மூன்றாவது மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகையிலிருந்து இரண்டாவது மதிப்பின் இரு மடங்கைக் கழிக்க வேண்டும். அதாவது $N_l P_q = 95+30-2\times 92 = -59$. இதே முறையில் N_q நிரலிலிருந்து $N_q P_l$, N_q P_q ஆகியவற்றைப் பெறும் முறையை ஊகித்துணரலாம். $P_l P_q$ நிரல்களிலிருந்து இதே விளைவுகளைக் கணக்கிட்டுச் சரி பார்த்துக் கொள்ளலாம்.

இனி வர்க்கங்கள்ன் கூட்டுத்தொகைகளைக் கணக்கிடலாம்.

$$N_l \text{ வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை} = \frac{(217)^2}{6\times 6}$$

$$= 1308.03$$

P_l வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= \frac{(139)^2}{6 \times 6}$

$= 536.69$

N_q வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= \frac{(-99)^2}{3\,(1^2+2^2 \times 1^2) \times 6}$

$= 90.75$

P_q வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= \frac{(-147)^2}{3\,(1^2+2^2+1^2) \times 6}$

$= 200.08$

$N_l\, P_l$ வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$= \frac{(-65)^2}{(1^2+1^2)(1^2+1^2) \times 6}$

$= 176.04$

$N_q\, P_l$ வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$= \frac{(-23)^2}{(1^2+2^2+1)^2\,(1^2+1^2) \times 6}$

$= 7.35$

$N_l\, P_q$ வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$= \frac{(-59)^2}{(1^2+1^2)\,(1^2+2^2+1^2) \times 6}$

$= 48.35$

$N_q\, P_q$ வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$= \frac{(-45)^2}{(^21+2^2+1^2)\,(1^2+2^2+1^2) \times 6}$

$= 9.38$

அட்டவணை 8.4.4

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை — 3^3 பகுதித் திருப்பச் சோதனை:

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி	F மதிப்பு	அட்டவணை F மதிப்பு 5%	1%
பிளாக்கு	5	304.22	60.84	...		
நடத்து முறை	8	2376.66	297.08	3.59	2.18	2.99
N_l	1	1308.03	1308.03	15.81	4.08	7.31
N_q	1	90.75	90.75	1.10		
P_l	1	536.69	536.69	6.49		
P_q	1	200.08	200.08	2.41		
$N_l P_l$	1	176.04	176.04	2.13		
$N_l P_q$	1	48.35	48.35	...		
$N_q P_l$	1	7.35	7.35	...		
$N_q P_q$	1	9.38	9.38	...		
பிழை	40	3310.45	82.76			
மொத்தம்	53	5991.33				

அட்டவணையில் நைட்ரஜன் ஒருபடி விளைவும், பாசுபேட்டு ஒருபடி விளைவும் பொருளுடையனவாக இருப்பதைக் காணலாம்.

9. உடன் மாறுபாடு

குறிப்பிட்ட சில சூழ்நிலைகளால் ஏற்படும் பரிசோதனைப் பிழையைக் கட்டுப்படுத்தி அல்லது குறைத்து நடத்துமுறை விளைவுகளைத் திருத்தமான அளவில் கணக்கிடப் பல முறைகள் மேற்கொள்ளப்படுகின்றன. முழுமையும் சம வாய்ப்புத் திட்டத்தில் பரிசோதனைக்கூறு முழுமையும் ஒரே மாதிரியாகக் கொள்வதன் மூலம் பரிசோதனைப் பிழை குறைக்கப்படுகின்றது. சம வாய்ப்புக் கட்டுதிட்ட அமைப்பில்,ஒரே மாதிரியாக இல்லாத பரிசோதனைக்கூறு, ஒரே மாதிரியான பிளாக்குகளாகப் பிரிக்கப் படுவதனுல் பிளாக்குகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடுகள் பரிசோதனைப் பிழையிலிருந்து நீக்கப்படுகின்றன. லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டத்தில் நிரல்களுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடுகளும், வரிசைகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடுகளும் பரிசோதனைப் பிழையிலிருந்து நீக்கப்படுகின்றன. இம் முறைகளில் நிகழ்விடக் கட்டுப்பாட்டின் மூலம் (local control) சோதனைப் பிழை குறைக்கப்படுகின்றது.

சம வாய்ப்புக் கட்டு திட்ட அமைப்பில் பிளாக்குகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாடுகள் நீக்கப்படுகின்றன. ஆனுல், ஒரே பிளாக்கில் உள்ள அடிப்படைக் கூறுகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடுகள் நீக்கப்படுவதில்லை. வேளாண்மைத்துறை சோதனைகளில் ஒவ்வொரு பிளாக்கிலுள்ள ஒவ்வோர் அடிப்படைக் கூறிலும் ஒரே எண்ணிக்கையிலான விதைகள் விதைக்கப்படுகின்றன. ஆனுல், அறுவடையின் போது ஒவ்வோர் அடிப்படைக் கூறிலும் உள்ள பயிர்களின் அல்லது செடிகளின் எண்ணிக்கைகள் ஓர் அளவினதாக இருக்கும் எனக் கூறுவதற்கில்லை. ஏனெனில், சில விதைகள் முளைக்காமலிருக்கலாம். சில செடிகள் அல்லது பயிர்கள் இடையில் மடிந்திருக்கலாம். இதனுல் ஒவ்வொரு அடிப்படைக் கூறிலும் உள்ள செடிகளின் அல்லது பயிர்களின் எண்ணிக்கைகள் வேறுபடலாம். இவ்வாறு எண்

ணிக்கைகளில் உள்ள வேறுபாடுகள் சோதனைப் பிழையைப் பாதிக்கின்றன. எனவே, ஒவ்வோர் அடிப்படைக் கூறின் விளைச்சலோடு அவ்வடிப்படைக் கூறிலுள்ள பயிர்களின் எண்ணிக்கையையும் கணக்கில் கொள்வதால், சோதனைப் பிழையைச் சிறிதளவு கட்டுப்படுத்தலாம்.

இம்முறையில், ஒவ்வொரு அடிப்படைக் கூறுக்கும் இரண்டு மதிப்புகள் இருக்கின்றன. முதல் மதிப்பு முக்கியமான விவரமாகிய விளைச்சலின் அளவு. இரண்டாவது மதிப்பு துணை விவரமாகிய ((supplementary data) பயிர்களின் எண்ணிக்கை. துணை விவரங்களைப் பயன்படுத்தி ஒரு பிளாக்கிலுள்ள அடிப்படைக் கூறுகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடுகளை நீக்கிச் சோதனைப்பிழையைக் குறைக்கும் திட்டம் உடன் மாறுபாட்டு திட்டமாகும். மற்ற திட்டங்களால் கட்டுப்படுத்த இயலாத சோதனைப் பிழையை துணைத் விவரங்களை எடுப்பதால் அளக்க முடியுமாயின், உடன் மாறுபாட்டுத் திட்டத்தைப் பயன் தரும் முறையில் மேற்கொள்ளலாம். சூழ்நிலை விவரங்களைக் கணக்கிடும் துணை விவரங்கள் நடத்து முறைகளால் பாதிக்கப்படாமல் இருக்க வேண்டும்.

உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு சரிசம வாய்ப்புத் திட்டங்களின் திட்பத்தினை அதிகமாக்குகின்றது. x_{ij} என்பது ஒவ்வோர் அடிப்படைக் கூறிலிருந்தும் ஒரு சீர்மை தேர்வாய்வின் (Uniformity trial) போது பெறப்பட்ட ஒரு குறிப்பிட்ட பயிரின் விளைச்சல்கள் எனக் கொள்ளலாம். ஒரு சீர்மைத் தேர்வாய்வில் ஒரே மாதிரியான நடத்து முறைகளைப் (Uniform treatment) பயன் படுத்தி ஒவ்வோர் அடிப்படைக் கூறிலிருந்தும் ஒரு குறிப்பிட்ட பயிரின் விளைச்சல்கள் பெறப்படுகின்றன. அடிப்படைக் கூறுகளிலிருந்து பெறப்பட்ட விளைச்சல்களை நோக்கும் பொழுது, நிலத்தின் வளம் அடிப்படைக் கூறுக்கு அடிப்படைக் கூறு மாறுவதைக் காணலாம். எனவே, ஒரு சீர்மைத் தேர்வாய்வின் விளைச்சல்களைக் குறிக்கும் x_{ij} அடிப்படைக் கூறுகளுக்கிடையேயுள்ள வள வேறுபாட்டைக் குறிக்கின்றது. y_{ij} என்பது நடத்து முறைகள் பயன்படுத்தப்பட்ட பின்பு அவ்வடிப்படைக் கூறுகளிலிருந்து பெறப்பட்ட அக்குறிப்பிட்ட பயிரின் விளைசல்கள் எனக் கொள்வோம். நடத்துமுறைகளின் சராசரி விளைச்சல்களை (y_{ij}-ன் கூட்டிடைகளை) அடிப்படைக் கூறுகளிடையே உள்ள வேறுபாடுகளுக்காக (x_{ij}-களிடையே உள்ள வேறுபாடுகள்) சரி செய்யும் பொழுது பரிசோதனைப் பிழை குறைகின்றது, நடத்துமுறைகளைத் திட்பமாக ஒப்பிட முடிகின்றது.

சில குறிப்பிட்ட வகை தீனிகளால் பன்றிகளின் எடைகளில் ஏற்படும் அதிகரிப்புகளைப் பற்றிய சோதனையில், பரிசோதனைக்கு ஈடுபடுத்து முன்பு பன்றிகளின் வயதுகளைக் குறித்துக் கொள்ளலாம். வயதிற்கும் எடை ஏற்றத்திற்கும் நேர்கோட்டுத் தொடர்பு இருந்தால் பன்றிகளின் எடைகளில் ஏற்பட்ட அதிகரிப்புகளுக்கு வயதும் ஒரு காரணமாகும். ஒரு பிரிவில் உள்ள பன்றிகளின் எடை அதிகரிப்புகளின் சராசரிக்கும், மற்றொரு பிரிவில் உள்ள பன்றிகளின் எடை அதிகரிப்புகளின் சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாடு நடத்துமுறை வேறுபாட்டால் ஏற்பட்டதா அல்லது வயது வேறுபாட்டினால் ஏற்பட்டதா என்பதை அறிய, வயதுகளின் மீதுள்ள தொடர்பிற்காக எடை அதிகரிப்புகளின் சராசரிகளைச் சரிசெய்த பின்பு உள்ள வேறுபாட்டைச் சோதனை செய்யவேண்டும்.

1. முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டத்தில் உள்ள மாறுபாடு

x_{ij}, y_{ij} என்பன i ஆவது நடத்து முறையினைக் கொண்ட j ஆவது x, y மதிப்புகளைக் குறிக்கின்றன. $i = 1, 2, \ldots m$; $j = 1, 2 \ldots n$.

இத் திட்டத்திற்கான நேர்கோட்டு உருவமைப்பு (linear model)

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta(x_{ij} - \bar{x}) + \epsilon_{ij}$$

$\bar{x} = x$ மதிப்புகளின் கூட்டிடை

$\beta = x$–ன் மீது y-ன் தொடர்புக் கெழு.

$\epsilon_{ij} =$ ராண்டம் விளைவு.

மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு β ஐ பரவற்படி ஆய்வின் பிழை வரிசையிலிருந்து மதிப்பிடலாம்.

$$\beta\text{-ன் மதிப்பீடு} = b = \frac{E_{xy}}{E_{xx}}$$

$E_{xx} = x$–ன் பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

$E_{xy} = x \times y$ பிழை பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை.

சரிசெய்யப்பட்ட i ஆவது நடத்து முறை விளைவின் மதிப்பீடு,

$$\hat{\bar{y}}_{i\cdot} = \bar{y}_{i\cdot} - b(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})$$

இதில்

$b(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})$ என்பது உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வில் வரும் சீரமைவு (adjustment)

இத் திட்டத்திற்கான ஆய்வு முறை உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு ஒரு வழிப்பிரிவில் உள்ளபடியே ஆகும்.

கீழே உள்ள அட்டவணை ஐந்து வகை தீனிகளால் பன்றிகளின் எடைகளில் ஏற்படும் அதிகரிப்புகளைத் தருகின்றது. ஒவ்வொரு பன்றிக்கும் எடை அதிகரிப்புடன், பரிசோதனையின் தொடக்கத்தில் அதன் வயதும் தரப்பட்டுள்ளது. வயதிற்கும் எடை அதிகரிப்பிற்கும் உள்ள தொடர்பினால் ஏற்படும் விளைவை நீக்கிய பின்பு நடத்து முறையின் விளைவுகளுக்கிடையே வேறுபாடுகள் உள்ளனவா எனச் சோதிக்க வேண்டும்,

பரிசோதனையின் தொடக்கத்தில் 25 பன்றிகளின் வயதுகளும் (நாள்களில்), பரிசோதனையின் முடிவில் பன்றிகளின் எடை அதிகரிப்புகளும் (கிலோ கிராமில்) தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணையில், *A*, *B*, *C*, *D*, *E* — தீனி வகைகள்

X — தொடக்கத்தில் வயது

Y — எடை அதிகரிப்பு

அட்டவணை 9.1.1

உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு

X	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*
68	10	77	16	66	16	61	13	71	19
1	*B*	10	*D*	11	*E*	20	*E*	21	*A*
X	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*
66	14	73	18	69	13	65	16	70	9
2	*D*	9	*A*	12	*D*	19	*C*	22	*D*
X	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*
77	14	82	21	88	19	88	18	65	15
3	*B*	8	*C*	18	*E*	18	*C*	23	*D*
X	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*
74	13	62	18	68	15	61	17	80	17
4	*B*	7	*C*	14	*A*	17	*A*	24	*E*
X	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*	*X*	*Y*
84	22	61	11	77	18	74	21	61	8
5	*C*	6	*B*	15	*E*	16	*A*	25	*B*

தரப்பட்டுள்ள விவரங்களைத் தீனி வகைகளுக்கு ஏற்ப ஒழுங்கு படுத்தி எழுதலாம்.

அட்டவணை 9.1.2

தீனி வகைகள்

A		B		C		D		E	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
71	19	68	10	65	16	77	16	66	16
73	18	77	14	82	21	66	14	61	13
68	15	74	13	88	18	69	13	88	19
61	17	61	11	62	18	70	9	80	17
74	21	61	8	84	22	65	15	77	18
347	90	341	56	381	95	347	67	372	83
69·4	18·0	68·2	11·2	76·2	19·0	69·4	13·4	67·4	16·6

	X	Y
மொத்தக் கூட்டுத் தொகை	1788	391
பொதுக் கூட்டிடை	71·52	15·64

கணக்கீடுகள்

ஆதியை $X = 70$, $Y = 15$ - க்கு மாற்றி கணக்கீடுகள் செய்யப்பட்டுள்ளன. $x = X - 70$; $y = Y - 15$

x மாறி:

(1) சரியீட்டளவு $= \dfrac{T^2_x}{N} = \dfrac{38^2}{25} = 57.76$

(2) $\sum\limits_i \sum\limits_j x^2_{ij} = (1)^2 + (3)^2 + \ldots\ldots + (10)^2 + (7)^2$

$= 1756$

(3) $\dfrac{1}{n} \sum\limits_i T^2_{xi} = \dfrac{(-3)^2 + (-9)^2 + (3)^2 + (-3)^2 + (22)^2}{5}$

$= \dfrac{1544}{5} = 308.80$

(4) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S_{xx} = \sum_i \sum_j x^2_{ij} - \frac{T^2_x}{N}$$

$$= (2) - (1)$$

$$= 1698.24$$

(5) வகை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= T_{xx} = \frac{1}{n} \sum_i T^2_{xi} - \frac{T^2_x}{N}$$

$$= (3) - (1)$$

$$= 251.04$$

(6) பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= E_{xx} = S_{xx} - T_{xx}$$

$$= (4) - (5)$$

$$= 1447.20$$

y மாறி:

(1) சரியீட்டளவு $= \frac{T^2_y}{N} = \frac{16^2}{25} = 10.24$

(2) $\sum_i \sum_j y^2_{ij} = (4)^2 + (3)^2 + \ldots\ldots + (-6)^2 + 0$

$$= 340$$

(3) $\frac{1}{n} \sum_i T^2_{yi} = \frac{(15)^2 + (-19)^2 + (20)^2 + (-8)^2 + (8)^2}{5}$

$$= \frac{1114}{5} = 222.80$$

(4) மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= S_{yy} = \sum_i \sum_j y^2_{ij} - \frac{T^2_y}{N}$$

$$= (2) - (1)$$

$$= 329{\cdot}76$$

(5) வகை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= T_{yy} = \frac{1}{n} \sum_i T^2_{yi} - \frac{T^2_y}{N}$$

$$= (3) - (1)$$

$$= 211.56$$

(6) பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= E_{yy} = S_{yy} - T_{yy}$$

$$= (4) - (5)$$

$$= 118{\cdot}20$$

x × y:

(1) சரியீட்டளவு $= \frac{T_x \cdot T_y}{5} = \frac{38 \times 16}{25} = 24.32$

(2) $\sum_i \sum_j x_{ij} \; y_{ij} = (1\times4)+(3\times3)+\ldots\ldots+(10\times2)+(7\times3)$

$$= 448$$

(3) $\frac{1}{n} \sum_i T_{xi} \cdot T_{yi}.$

$$= \frac{(-3\times15)+(-9\times-19)+(31\times20)+(-3\times-8)+(22\times8)}{5}$$

$$= \frac{946}{5}$$

$$= 189.20$$

(4) மொத்த பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை

$$=S_{xy}$$

$$=\sum_i\sum_j x_{ij}y_{ij} - \frac{T_x \cdot T_y}{N}$$

$$= (2)-(1)$$

$$=423.68$$

(5) வகை பெருக்குத் தொகைகளின்கூட்டுத்தொகை

$$= T_{xy}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_i T_{xi} \cdot T_{yi\cdot} - \frac{T_x . T_y}{N}$$

$$= (3)-(1)$$

$$= 164.88$$

(6) பிழை பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை

$$= E_{xy}$$

$$= S_{yx}-T_{xy}$$

$$= (4)-(5)$$

$$= 258.80$$

மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுவின் மதிப்பீடு

$$= b = \frac{E_{xy}}{E_{xx}}$$

$$= \frac{258.80}{1447.20}$$

$$= 0.18$$

X-ன் மீது Y-ன் தொடர்பிற்காகச்சரிசெய்யப்பட்ட Y-ன் பிழைவர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை E^a_{yy}

$$= E_{yy} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}}$$

$$= 118.20 - \frac{(258.80)^2}{1447.20}$$

$$= 118.20-46.29$$

$$= 71.91$$

சரிசெய்யப்பட்ட Y–ன் மொத்தவர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை S^a_{yy}

$$= S_{yy} - \frac{S^2_{xy}}{S_{xx}}$$

$$= 329.76 - \frac{(423.68)^2}{1698.24}$$

$$= 329.76 - 105.80$$

$$= 223.96$$

சரி செய்யப்பட்ட Y–ன் வகைவர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை T^a_{yy}

$$= S^a_{yy} - E^a_{yy}$$

$$= 223.96 - 71.91$$

$$= 152.05$$

அட்டவணை 9.1.3

உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு அட்டவணை — முழுமையும் சம வாய்ப்புத்திட்டம்

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை		பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை	வரையற்ற பாகைகள்	சரிசெய்யப்பட்ட வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
		X	Y			
வகைகள்	4	251.40	211.56	164.88	4	$T^a_{yy} = 152.05$
பிழை	20	1447.20	118.20	258.80	19	$E^a_{yy} = 71.91$
மொத்தம்	24	1698.24	329.76	423.68	23	$S^a_{yy} = 223.96$

சரிசெய்யப்பட்ட தீனிவகைகளின் விளைவுகள் (எடை அதிகரிப்புகள்) இடையேயுள்ள வேறுபாடுகளைச் சோதனை செய்ய,

$$F = \frac{T^{a}_{yy}/m-1}{E^{a}_{yy}/N-m-1}$$

$$= \frac{152{\cdot}05/4{\cdot}}{71.91/19}$$

$$= 10.05$$

$F = 10{\cdot}05 > F_{{\cdot}01,\,4,\,19} = 4.50$ ஆக இருப்பதால், வயதுடன் எடை அதிகரிப்பிற்கு உள்ள தொடர்பிற்காகச் சரிசெய்த பின்பு தீனிவகைகளின் விளைவுகள் (எடை அதிகரிப்புகள்) இடையே வேறுபாடுகள் 1 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையனவாக இருக்கின்றன.

இனி, சரிசெய்யப்பட்ட தீனிவகைகளின் விளைவுகளின் கூட்டிடைகளைக் காணலாம்·

சரிசெய்யப்பட்ட i ஆவது தீனிவகையின் கூட்டிடை,

$\hat{\bar{y}}_{i\cdot} = \bar{y}_{i\cdot} - b(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})$

$\hat{\bar{y}}_1 = 18 - .18\ (69.40 - 71.52)$

$= 18 + .38$

$= 18{\cdot}38$

$\hat{\bar{y}}_2 = 11.2 - .18\ (68.2 - 71.52)$

$= 11.2 + .60$

$= 11.80$

$\hat{\bar{y}}_3 = 19 - .18\ (76.20 - 71.52)$

$= 19 - .84$

$= 18.16$

$\hat{y}_4 = 13.4 - .18\ (69.4 - 71.52)$

$= 13.4 + .38$

$= 13.78$

$\hat{y}_5 = 16.6 - .18\ (67.4 - 71.52)$

$= 16.6 + .74$

$= 17.34$

சரி செய்யப்பட்ட தீனிவகைகளின் விளைவுகளின் கூட்டிடைகளிடையேயுள்ள வேறுபாடுகளை t-மதிப்பைப் பயன்படுத்திச் சோதனையிடலாம்.

சரி செய்யப்பட்ட iஆவது, j ஆவது கூட்டிடைகளுக்கிடையே யுள்ள வேறுபாடு,

$$D = \hat{\bar{y}}_i - \hat{\bar{y}}_j = \bar{y}_i - b\ (\bar{x}_{i.} - \bar{x}) - \bar{y}_{i.} + b\ (\bar{x}_{j.} - \bar{x})$$

$$= \bar{y}_{i.} = \bar{y}_{j.} - b\ (\bar{x}_i - \bar{x}_{j.})$$

D - ன் மதிப்பிடப்பட்ட மாறுபாடு,

$$S_D^2 = \frac{E^a_{yy}}{f^a_e} \left\{ \frac{2}{n} + \frac{(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{j.})^2}{E_{xx}} \right\}$$

இதில் f^a_e = சரி செய்யப்பட்ட பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கான வரையற்ற பாகைகள்.

சரி செய்யப்பட்ட முதல் இரண்டாவது கூட்டிடைகளை ஒப்பிட,

$D = \hat{\bar{y}}_{1.} - \hat{\bar{y}}_{2.}$

$= 18.38 - 11.80$

$= 6.58$

$$S_D^2 = \frac{E^a_{yy}}{f^a_e} \left\{ \frac{2}{n} + \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{E_{xx}} \right\}$$

$$= \frac{71.91}{19} \left\{ \frac{2}{5} + \frac{(69.40-68.20)^2}{1447.20} \right\}$$

$$= 1.52$$

$$t = \frac{6.58}{\sqrt{1.52}}$$

$$= 5.337$$

$t = 5.337 > t_{.01, 19} = 2.539$ ஆக இருப்பதால் சரி செய்யப் பட்ட முதல் இரண்டாவது கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடு பொருளுடையவகையில் (1 சதவீத மட்டத்தில்) இருக்கின்றது.

சரிசெய்யப்படாத கூட்டிடைகளுடன் ஒப்பிடும் பொழுது, சரி செய்யப்பட்ட கூட்டிடைகளின் பயில் திறன் (Efficiency) :

$$\text{பயில்திறன்} = \frac{E_{yy}/f_e}{\frac{E^a_{yy}}{f^a_e}\left[1 + \frac{T_{xx}}{E_{xx}}\right]}$$

$$= \frac{118.20/20}{\frac{71.91}{19}\left[1 + \frac{251.04}{1447.20}\right]}$$

$$= 1.33$$

உடன்மாறுபாட்டாய்வில் ஒவ்வொரு நடத்துமுறைக்கும் 10 ரெப்லிகேசன்கள் இருப்பது, சரிசெய்யப்படாத கூட்டிடை கள் 13 ரெப்லிகேசன்களைக் கொண்டிருப்பதற்குச் சமமாகின்றது.

2. கட்டுதிட்ட சமவாய்ப்புத் திட்டத்தில் உடன்மாறுபாடு

கட்டுதிட்ட சமவாய்ப்புத்திட்டத்தில் உடன்மாறுபாட்டு ஆய்விற்கான உருவமைப்பு,

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \rho_j + \beta\,(x_{ij} - \bar{x}) + E_{ij}.$$

இதில்,

μ = பொதுவிளைவு

α_i = i ஆவது நடத்துமுறையின் விளைவு.

P_j = j ஆவது ரெப்லிகேசனின் விளைவு.

β = x-ன் மீது y ன் தொடர்புக் கெழு.

E_{ij} = ராண்டம் விளைவு

$\beta(x_{ij}-\bar{x})$ என்பது உடன்மாறுபாட்டு ஆய்வில் வரும் சீரமைவு.

தொடர்புக் கெழு β-ன் மதிப்பீடு $b=\dfrac{E_{xy}}{E_{xx}}$

i ஆவது சரிசெய்யப்பட்ட நடத்துமுறை கூட்டிடையின் மதிப்பீடு

$$\hat{y}_{i\cdot}=\bar{y}_{i\cdot}-\beta(\bar{x}_i-\bar{x})$$

கீழே தரப்பட்டுள்ள கட்டுதிட்ட சமவாய்ப்புத் திட்டத்தில் ஒவ்வொரு அடிப்படைக் கூறுக்கும் இரண்டு மதிப்புகள் தரப் பட்டுள்ளன. ஒன்று ஒரு சீர்மை தேர்வாய்வின் போது நெல் லின் விளைச்சல் (X); மற்றொன்று நடத்துமுறைக்குப் பின் கிடைத்த விளைச்சல் (Y). A, B, C, D, E என்னும் ஐந்துவகை உரங்கள் (நடத்துமுறைகள்) பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. X-ன் மீது Y-க்கு உள்ள தொடர்பிற்காக Y-விளைச்சல்கள் சரிசெய்யப் பட்ட பின்பு உரங்களின் விளைவுகளின் வேறுபாடுகள் உள்ள னவா எனச் சோதிக்கப்படுகின்றது. விளைச்சல்கள் கிலோ கிராம்களில் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 9.2.1

உர வகைகள்

		A		B		C		D		E			
		X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
நேர்வரிசைகள்	1	25	35	21	24	22	29	8	12	20	24	96	124
	2	22	30	12	12	24	35	16	22	26	30	100	129
	3	29	34	14	19	20	29	20	22	14	17	97	121
	4	19	25	22	27	32	40	20	25	18	23	111	140
	5	20	27	24	31	18	27	24	27	14	17	100	129
மொத்தம்		115	151	93	113	116	160	88	108	92	111	504	643

இப்பரிசோதனைக்குரிய உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு அட்ட வணை தரப்பட்டுள்ளது. கணக்கீடுகள் உடன்மாறுபாட்டு ஆய்வு இருவழிப் பிரிவில் உள்ளவை போன்றனவே.

அட்டவணை 9.2.2

உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு அட்டவணை

கட்டுதிட்ட சமவாய்ப்புத் திட்டம்

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை X	Y	பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகை	வரையற்ற பாகைகள்	சரி செய்யப்பட்ட வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
உரவகைகள்	4	146.96	493.04	267.12		
ரெப்ளிகேசன்கள்	4	28.56	41.84	33.12		
பிழை	16	511.84	618.16	534.68	15	$E^{a}_{yy} = 59.56$
மொத்தம்	24	687.36	1153.04	835.12		
உரவகைகள் + பிழை	20	685.80	1111.20	801.80	19	$(T_{yy}+E_{yy})^{a} = 135.50$
மாறிகளின் தொடர்பிற்காகச் சரி செய்யப்பட்ட உரவகை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை					4	$T_{y^a y} = 75.94$

சரி செய்யப்பட்ட கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் உள்ளனவா எனச் சோதனை செய்ய,

$$F = \frac{T^{a}_{yy}/m-1}{E^{a}_{yy}/(m-1)\ (n-1)-1}$$

$$= \frac{75.94/4}{59.56/15}$$

$$= 4.78$$

$F = 4.78 > F_{.05,\ 4,\ 15} = 3.06$ ஆக இருப்பதால், சரி செய்யப்பட்ட கூட்டிடைகளிடையே வேறுபாடுகள் 5 சதவீத மட்டத்தில் பொருளுடையனவாக இருக்கின்றன.

இனி, சரி செய்யப்பட்ட உர வகைகளின் கூட்டிடைகளின் மதிப்புகளைக் காணலாம். சரி செய்யப்பட்ட iஆவது கூட்டிடையின் மதிப்பு,

$$\bar{y}_{i\cdot} = \bar{y}_{i\cdot} - b\,(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})$$

A உர வகைக்குச் சரி செய்யப்பட்ட y_1 கூட்டிடையின் மதிப்பீடு

$$= \bar{y}_{i\cdot} - b\,(\bar{x}_{j\cdot} - \bar{x})$$

$$= 30.20 - 1.21\,(23.00 - 20.16)$$

$$= 26.76$$

B உர வகைக்குச் சரி செய்யப்பட்ட y_2 கூட்டிடையின் மதிப்பீடு

$$= y_2 - b\,(\bar{x}_{2\cdot} - \bar{x})$$

$$= 22.60 - 1.21\,(18.60 - 20.16)$$

$$= 24.49$$

C உர வகைக்குச் சரி செய்யப்பட்ட y_3 கூட்டிடையின் மதிப்பீடு

$$= \bar{y}_{3\cdot} - b\,(\bar{x}_{3\cdot} - \bar{x})$$

$$= 32.00 - 1.21\,(23.20 - 20.16)$$

$$= 28.32$$

D உர வகைக்குச் சரி செய்யப்பட்ட y_4 கூட்டிடையின் மதிப்பீடு

$$= \bar{y}_{4\cdot} - b\,(\bar{x}_4 - \bar{x})$$

$$= 20.60 - 1.21\,(17.60 - 20.16)$$

$$= 23.70$$

E உர வகைக்குச் சரி செய்யப்பட்ட y_5 கூட்டிடையின் மதிப்பீடு,

$$= \bar{y}_5 - b\,(\bar{x}_5. - \bar{x})$$
$$= 22.20 - 1.21\,(18.40 - 20.16)$$
$$= 24.33$$

சரி செய்யப்பட்ட இரு கூட்டிடைகளிடையே உள்ள வேறுபாட்டை t மதிப்பைப் பயன்படுத்திச் சோதனை செய்யலாம். சரி செய்யப்பட்ட i, jஆவது கூட்டிடைகளிடையே உள்ள வேறுபாட்டைச் சோதனை செய்ய,

$$t = \frac{\hat{\bar{y}}_{i\cdot} - \hat{\bar{y}}_j}{s_D}$$

இதில்,

$$s_D = \left[\frac{E^a_{yy}}{f^a_e} \left\{ \frac{2}{n} + \frac{(\bar{x}_i - \bar{x}_{j\cdot})^2}{E_{xx}} \right. \right]^{\frac{1}{2}}$$

f^a_e = சரி செய்யப்பட்ட பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கான வரையற்ற பாகைகள்.

எடுத்துக் காட்டாக, சரி செய்யப்பட்ட C, D கூட்டிடைகளிடையே உள்ள வேறுபாட்டைச் சோதனையிடலாம்.

சரி செய்யப்பட்ட கூட்டிடை $C = 28.32$

சரி செய்யப்பட்ட கூட்டிடை $D = 23.70$

$$s^2_D = \frac{59.56}{15} \left\{ \frac{2}{5} + \frac{(23.20 - 17.60)^2}{511.84} \right\}$$
$$= 1.83$$
$$s_D = 1.35$$
$$t = \frac{4.62}{1.35}$$
$$= 3.42$$
$$t_{.01,\,15} = 2.947$$
$$t = 3.42 > t_{.01,\,15} = 2.947$$

எனவே, C, D கூட்டிடைகளிடையே உள்ள வேறுபாடு பொருளுடைய வகையில் இருக்கின்றது.

F பரவலுக்கான 5%, 1% மதிப்புகளைத்தரும் அட்டவணை*

இயலுருத் தோற்றம் (Roman type) 5% மதிப்புகளையும், தடித்த உருத் தோற்றம் (Bold face type) 1% மதிப்புகளையும் குறிக்கின்றன.

f_1 வரையற்ற பாகைகள் (பெரிய வர்க்கச் சராசரிக்கு)

f_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161 **4,052**	200 **4,999**	216 **5,403**	225 **5,625**	230 **5,764**	234 **5,859**	237 **5,928**	239 **5,981**	241 **6,022**	242 **6,056**	243 **6,082**	244 **6,106**
2	18.51 **98.49**	19.00 **99.01**	19.16 **99.17**	19.25 **99.25**	19.30 **99.30**	19.33 **99.33**	19.36 **99.34**	19.37 **99.36**	19.38 **99.38**	19.39 **99.40**	19.40 **99.41**	19.41 **99.42**
3	10.13 **34.12**	9.55 **30.81**	9.28 **29.46**	9.12 **28.71**	9.01 **28.24**	8.94 **27.91**	8.88 **27.67**	8.84 **27.49**	8.81 **27.34**	8.78 **27.23**	8.76 **27.13**	8.74 **27.05**
4	7.71 **21.20**	6.94 **18.00**	6.59 **16.69**	6.39 **15.98**	6.26 **15.52**	6.16 **15.21**	6.09 **14.98**	6.04 **14.80**	6.00 **14.66**	5.96 **14.54**	5.93 **14.45**	5.91 **14.37**
5	6.61 **16.26**	5.79 **13.27**	5.41 **12.06**	5.19 **11.39**	5.05 **10.97**	4.95 **10.67**	4.88 **10.45**	4.82 **10.27**	4.78 **10.15**	4.74 **10.05**	4.70 **9.96**	4.68 **9.89**
6	5.99 **13.74**	5.14 **10.92**	4.76 **9.78**	4.53 **9.15**	4.39 **8.75**	4.28 **8.47**	4.21 **8.26**	4.15 **8.10**	4.10 **7.98**	4.06 **7.87**	4.03 **7.79**	4.00 **7.72**
7	5.59 **12.25**	4.74 **9.55**	4.35 **8.45**	4.12 **7.85**	3.97 **7.46**	3.87 **7.19**	3.79 **7.00**	3.73 **6.84**	3.68 **6.71**	3.63 **6.62**	3.60 **6.54**	3.57 **6.47**
8	5.32 **11.26**	4.46 **8.65**	4.07 **7.59**	3.84 **7.01**	3.69 **6.63**	3.58 **6.37**	3.50 **6.19**	3.44 **6.03**	3.39 **5.91**	3.34 **5.82**	3.31 **5.74**	3.28 **5.67**
9	5.12 **10.56**	4.26 **8.02**	3.86 **6.99**	3.63 **6.42**	3.48 **6.06**	3.37 **5.80**	3.29 **5.62**	3.23 **5.47**	3.18 **5.35**	3.13 **5.26**	3.10 **5.18**	3.07 **5.11**
10	4.96 **10.04**	4.10 **7.56**	3.71 **6.55**	3.48 **5.99**	3.33 **5.64**	3.22 **5.39**	3.14 **5.21**	3.07 **5.06**	3.02 **4.95**	2.97 **4.85**	2.94 **4.78**	2.91 **4.71**
11	4.84 **9.65**	3.98 **7.20**	3.59 **6.22**	3.36 **5.67**	3.20 **5.32**	3.09 **5.07**	3.01 **4.88**	2.95 **4.74**	2.90 **4.63**	2.86 **4.54**	2.82 **4.46**	2.79 **4.40**
12	4.75 **9.33**	3.88 **6.93**	3.49 **5.95**	3.26 **5.41**	3.11 **5.06**	3.00 **4.82**	2.92 **4.65**	2.85 **4.50**	2.80 **4.39**	2.76 **4.30**	2.72 **4.22**	2.69 **4.16**
13	4.67 **9.07**	3.80 **6.70**	3.41 **5.74**	3.18 **5.20**	3.02 **4.86**	2.92 **4.62**	2.84 **4.44**	2.77 **4.30**	2.72 **4.19**	2.67 **4.10**	2.63 **4.02**	2.60 **3.96**
14	4.60 **8.86**	3.74 **6.51**	3.34 **5.56**	3.11 **5.03**	2.96 **4.69**	2.85 **4.46**	2.77 **4.28**	2.70 **4.14**	2.65 **4.03**	2.60 **3.94**	2.56 **3.86**	2.53 **3.80**
15	4.54 **8.68**	3.68 **6.36**	3.29 **5.42**	3.06 **4.89**	2.90 **4.56**	2.79 **4.32**	2.70 **4.14**	2.64 **4.00**	2.59 **3.89**	2.55 **3.80**	2.51 **3.73**	2.48 **3.67**
16	4.49 **8.53**	3.63 **6.23**	3.24 **5.29**	3.01 **4.77**	2.85 **4.44**	2.74 **4.20**	2.66 **4.03**	2.59 **3.89**	2.54 **3.78**	2.49 **3.69**	2.45 **3.61**	2.42 **3.55**
17	4.45 **8.40**	3.59 **6.11**	3.20 **5.18**	2.96 **4.67**	2.81 **4.34**	2.70 **4.10**	2.62 **3.93**	2.55 **3.79**	2.50 **3.68**	2.45 **3.59**	2.41 **3.52**	2.38 **3.45**
18	4.41 **8.28**	3.55 **6.01**	3.16 **5.09**	2.93 **4.58**	2.77 **4.25**	2.66 **4.01**	2.58 **3.85**	2.51 **3.71**	2.46 **3.60**	2.41 **3.51**	2.37 **3.44**	2.34 **3.37**
19	4.38 **8.18**	3.52 **5.93**	3.13 **5.01**	2.90 **4.50**	2.74 **4.17**	2.63 **3.94**	2.55 **3.77**	2.48 **3.63**	2.43 **3.52**	2.38 **3.43**	2.34 **3.36**	2.31 **3.30**
20	4.35 **8.10**	3.49 **5.85**	3.10 **4.94**	2.87 **4.43**	2.71 **4.10**	2.60 **3.87**	2.52 **3.71**	2.45 **3.56**	2.40 **3.45**	2.35 **3.37**	2.31 **3.30**	2.28 **3.23**
21	4.32 **8.02**	3.47 **5.78**	3.07 **4.87**	2.84 **4.37**	2.68 **4.04**	2.57 **3.81**	2.49 **3.65**	2.42 **3.51**	2.37 **3.40**	2.32 **3.31**	2.28 **3.24**	2.25 **3.17**
22	4.30 **7.94**	3.44 **5.72**	3.05 **4.82**	2.82 **4.31**	2.66 **3.99**	2.55 **3.76**	2.47 **3.59**	2.40 **3.45**	2.35 **3.35**	2.30 **3.26**	2.26 **3.18**	2.23 **3.12**
23	4.28 **7.88**	3.42 **5.66**	3.03 **4.76**	2.80 **4.26**	2.64 **3.94**	2.53 **3.71**	2.45 **3.54**	2.38 **3.41**	2.32 **3.30**	2.28 **3.21**	2.24 **3.14**	2.20 **3.07**
24	4.26 **7.82**	3.40 **5.61**	3.01 **4.72**	2.78 **4.22**	2.62 **3.90**	2.51 **3.67**	2.43 **3.50**	2.36 **3.36**	2.30 **3.25**	2.26 **3.17**	2.22 **3.09**	2.18 **3.03**
25	4.24 **7.77**	3.38 **5.57**	2.99 **4.68**	2.76 **4.18**	2.60 **3.86**	2.49 **3.63**	2.41 **3.46**	2.34 **3.32**	2.28 **3.21**	2.24 **3.13**	2.20 **3.05**	2.16 **2.99**
26	4.22 **7.72**	3.37 **5.53**	2.98 **4.64**	2.74 **4.14**	2.59 **3.82**	2.47 **3.59**	2.39 **3.42**	2.32 **3.29**	2.27 **3.17**	2.22 **3.09**	2.18 **3.02**	2.15 **2.96**

F பரவலுக்கான 5%, 1% மதிப்புகளைத்தரும் அட்டவணை *

f_1 வரையற்ற பாகைகள் (பெரிய வர்க்கச் சராசரிக்கு)

14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	f_2
245 **6,142**	246 **6,169**	248 **6,208**	249 **6,234**	250 **6,258**	251 **6,286**	252 **6,302**	253 **6,323**	253 **6,334**	254 **6,352**	254 **6,361**	254 **6,366**	1
19.42 **99.43**	19.43 **99.44**	19.44 **99.45**	19.45 **99.46**	19.46 **99.47**	19.47 **99.48**	19.47 **99.48**	19.48 **99.49**	19.49 **99.49**	19.49 **99.49**	19.50 **99.50**	19.50 **99.50**	2
8.71 **26.92**	8.69 **26.83**	8.66 **26.69**	8.64 **26.60**	8.62 **26.50**	8.60 **26.41**	8.58 **26.35**	8.57 **26.27**	8.56 **26.23**	8.54 **26.18**	8.54 **26.14**	8.53 **26.12**	3
5.87 **14.24**	5.84 **14.15**	5.80 **14.02**	5.77 **13.93**	5.74 **13.83**	5.71 **13.74**	5.70 **13.69**	5.68 **13.61**	5.66 **13.57**	5.65 **13.52**	5.64 **13.48**	5.63 **13.46**	4
4.64 **9.77**	4.60 **9.68**	4.56 **9.55**	4.53 **9.47**	4.50 **9.38**	4.46 **9.29**	4.44 **9.24**	4.42 **9.17**	4.40 **9.13**	4.38 **9.07**	4.37 **9.04**	4.36 **9.02**	5
3.96 **7.60**	3.92 **7.52**	3.87 **7.39**	3.84 **7.31**	3.81 **7.23**	3.77 **7.14**	3.75 **7.09**	3.72 **7.02**	3.71 **6.99**	3.69 **6.94**	3.68 **6.90**	3.67 **6.88**	6
3.52 **6.35**	3.49 **6.27**	3.44 **6.15**	3.41 **6.07**	3.38 **5.98**	3.34 **5.90**	3.32 **5.85**	3.29 **5.78**	3.28 **5.75**	3.25 **5.70**	3.24 **5.67**	3.23 **5.65**	7
3.23 **5.56**	3.20 **5.48**	3.15 **5.36**	3.12 **5.28**	3.08 **5.20**	3.05 **5.11**	3.03 **5.06**	3.00 **5.00**	2.98 **4.96**	2.96 **4.91**	2.94 **4.88**	2.93 **4.86**	8
3.02 **5.00**	2.98 **4.92**	2.93 **4.80**	2.90 **4.73**	2.86 **4.64**	2.82 **4.56**	2.80 **4.51**	2.77 **4.45**	2.76 **4.41**	2.73 **4.36**	2.72 **4.33**	2.71 **4.31**	9
2.86 **4.60**	2.82 **4.52**	2.77 **4.41**	2.74 **4.33**	2.70 **4.25**	2.67 **4.17**	2.64 **4.12**	2.61 **4.05**	2.59 **4.01**	2.56 **3.96**	2.55 **3.93**	2.54 **3.91**	10
2.74 **4.29**	2.70 **4.21**	2.65 **4.10**	2.61 **4.02**	2.57 **3.94**	2.53 **3.86**	2.50 **3.80**	2.47 **3.74**	2.45 **3.70**	2.42 **3.66**	2.41 **3.62**	2.40 **3.60**	11
2.64 **4.05**	2.60 **3.98**	2.54 **3.86**	2.50 **3.78**	2.46 **3.70**	2.42 **3.61**	2.40 **3.56**	2.36 **3.49**	2.35 **3.46**	2.32 **3.41**	2.31 **3.38**	2.30 **3.36**	12
2.55 **3.85**	2.51 **3.78**	2.46 **3.67**	2.42 **3.59**	2.38 **3.51**	2.34 **3.42**	2.32 **3.37**	2.28 **3.30**	2.26 **3.27**	2.24 **3.21**	2.22 **3.18**	2.21 **3.16**	13
2.48 **3.70**	2.44 **3.62**	2.39 **3.51**	2.35 **3.43**	2.31 **3.34**	2.27 **3.26**	2.24 **3.21**	2.21 **3.14**	2.19 **3.11**	2.16 **3.06**	2.14 **3.02**	2.13 **3.00**	14
2.43 **3.56**	2.39 **3.48**	2.33 **3.36**	2.29 **3.29**	2.25 **3.20**	2.21 **3.12**	2.18 **3.07**	2.15 **3.00**	2.12 **2.97**	2.10 **2.92**	2.08 **2.89**	2.07 **2.87**	15
2.37 **3.45**	2.33 **3.37**	2.28 **3.25**	2.24 **3.18**	2.20 **3.10**	2.16 **3.01**	2.13 **2.96**	2.09 **2.89**	2.07 **2.86**	2.04 **2.80**	2.02 **2.77**	2.01 **2.75**	16
2.33 **3.35**	2.29 **3.27**	2.23 **3.16**	2.19 **3.08**	2.15 **3.00**	2.11 **2.92**	2.08 **2.86**	2.04 **2.79**	2.02 **2.76**	1.99 **2.70**	1.97 **2.67**	1.96 **2.65**	17
2.29 **3.27**	2.25 **3.19**	2.19 **3.07**	2.15 **3.00**	2.11 **2.91**	2.07 **2.83**	2.04 **2.78**	2.00 **2.71**	1.98 **2.68**	1.95 **2.62**	1.93 **2.59**	1.92 **2.57**	18
2.26 **3.19**	2.21 **3.12**	2.15 **3.00**	2.11 **2.92**	2.07 **2.84**	2.02 **2.76**	2.00 **2.70**	1.96 **2.63**	1.94 **2.60**	1.91 **2.54**	1.90 **2.51**	1.88 **2.49**	19
2.23 **3.13**	2.18 **3.05**	2.12 **2.94**	2.08 **2.86**	2.04 **2.77**	1.99 **2.69**	1.96 **2.63**	1.92 **2.56**	1.90 **2.53**	1.87 **2.47**	1.85 **2.44**	1.84 **2.42**	20
2.20 **3.07**	2.15 **2.99**	2.09 **2.88**	2.05 **2.80**	2.00 **2.72**	1.96 **2.63**	1.93 **2.58**	1.89 **2.51**	1.87 **2.47**	1.84 **2.42**	1.82 **2.38**	1.81 **2.36**	21
2.18 **3.02**	2.13 **2.94**	2.07 **2.83**	2.03 **2.75**	1.98 **2.67**	1.93 **2.58**	1.91 **2.53**	1.87 **2.46**	1.84 **2.42**	1.81 **2.37**	1.80 **2.33**	1.78 **2.31**	22
2.14 **2.97**	2.10 **2.89**	2.04 **2.78**	2.00 **2.70**	1.96 **2.62**	1.91 **2.53**	1.88 **2.48**	1.84 **2.41**	1.82 **2.37**	1.79 **2.32**	1.77 **2.28**	1.76 **2.26**	23
2.13 **2.93**	2.09 **2.85**	2.02 **2.74**	1.98 **2.66**	1.94 **2.58**	1.89 **2.49**	1.86 **2.44**	1.82 **2.36**	1.80 **2.33**	1.76 **2.27**	1.74 **2.23**	1.73 **2.21**	24
2.11 **2.89**	2.06 **2.81**	2.00 **2.70**	1.96 **2.62**	1.92 **2.54**	1.87 **2.45**	1.84 **2.40**	1.80 **2.32**	1.77 **2.29**	1.74 **2.23**	1.72 **2.19**	1.71 **2.17**	25
2.10 **2.86**	2.05 **2.77**	1.99 **2.66**	1.95 **2.58**	1.90 **2.50**	1.85 **2.41**	1.82 **2.36**	1.78 **2.28**	1.76 **2.25**	1.72 **2.19**	1.70 **2.15**	1.69 **2.13**	26

F பரவலுக்கான 5%, 1% மதிப்புகளைத்தரும் அட்டவணை*

(தொடர்ச்சி)

f_1 வரையற்ற பாகைகள் (பெரிய வர்க்கச் சராசரிக்கு)

f_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	4.21 **7.68**	3.35 **5.49**	2.96 **4.60**	2.73 **4.11**	2.57 **3.79**	2.46 **3.56**	2.37 **3.39**	2.30 **3.26**	2.25 **3.14**	2.20 **3.06**	2.16 **2.98**	2.13 **2.93**
28	4.20 **7.64**	3.34 **5.45**	2.95 **4.57**	2.71 **4.07**	2.56 **3.76**	2.44 **3.53**	2.36 **3.36**	2.29 **3.23**	2.24 **3.11**	2.19 **3.03**	2.15 **2.95**	2.12 **2.90**
29	4.18 **7.60**	3.33 **5.42**	2.93 **4.54**	2.70 **4.04**	2.54 **3.73**	2.43 **3.50**	2.35 **3.33**	2.28 **3.20**	2.22 **3.08**	2.18 **3.00**	2.14 **2.92**	2.10 **2.87**
30	4.17 **7.56**	3.32 **5.39**	2.92 **4.51**	2.69 **4.02**	2.53 **3.70**	2.42 **3.47**	2.34 **3.30**	2.27 **3.17**	2.21 **3.06**	2.16 **2.98**	2.12 **2.90**	2.09 **2.84**
32	4.15 **7.50**	3.30 **5.34**	2.90 **4.46**	2.67 **3.97**	2.51 **3.66**	2.40 **3.42**	2.32 **3.25**	2.25 **3.12**	2.19 **3.01**	2.14 **2.94**	2.10 **2.86**	2.07 **2.80**
34	4.13 **7.44**	3.28 **5.29**	2.88 **4.42**	2.65 **3.93**	2.49 **3.61**	2.38 **3.38**	2.30 **3.21**	2.23 **3.08**	2.17 **2.97**	2.12 **2.89**	2.08 **2.82**	2.05 **2.76**
36	4.11 **7.39**	3.26 **5.25**	2.86 **4.38**	2.63 **3.89**	2.48 **3.58**	2.36 **3.35**	2.28 **3.18**	2.21 **3.04**	2.15 **2.94**	2.10 **2.86**	2.06 **2.78**	2.03 **2.72**
38	4.10 **7.35**	3.25 **5.21**	2.85 **4.34**	2.62 **3.86**	2.46 **3.54**	2.35 **3.32**	2.26 **3.15**	2.19 **3.02**	2.14 **2.91**	2.09 **2.82**	2.05 **2.75**	2.02 **2.69**
40	4.08 **7.31**	3.23 **5.18**	2.84 **4.31**	2.61 **3.83**	2.45 **3.51**	2.34 **3.29**	2.25 **3.12**	2.18 **2.99**	2.12 **2.88**	2.07 **2.80**	2.04 **2.73**	2.00 **2.66**
42	4.07 **7.27**	3.22 **5.15**	2.83 **4.29**	2.59 **3.80**	2.44 **3.49**	2.32 **3.26**	2.24 **3.10**	2.17 **2.96**	2.11 **2.86**	2.06 **2.77**	2.02 **2.70**	1.99 **2.64**
44	4.06 **7.24**	3.21 **5.12**	2.82 **4.26**	2.58 **3.78**	2.43 **3.46**	2.31 **3.24**	2.23 **3.07**	2.16 **2.94**	2.10 **2.84**	2.05 **2.75**	2.01 **2.68**	1.98 **2.62**
46	4.05 **7.21**	3.20 **5.10**	2.81 **4.24**	2.57 **3.76**	2.42 **3.44**	2.30 **3.22**	2.22 **3.05**	2.14 **2.92**	2.09 **2.82**	2.04 **2.73**	2.00 **2.66**	1.97 **2.60**
48	4.04 **7.19**	3.19 **5.08**	2.80 **4.22**	2.56 **3.74**	2.41 **3.42**	2.30 **3.20**	2.21 **3.04**	2.14 **2.90**	2.08 **2.80**	2.03 **2.71**	1.99 **2.64**	1.96 **2.58**
50	4.03 **7.17**	3.18 **5.06**	2.79 **4.20**	2.56 **3.72**	2.40 **3.41**	2.29 **3.18**	2.20 **3.02**	2.13 **2.88**	2.07 **2.78**	2.02 **2.70**	1.98 **2.62**	1.95 **2.56**
55	4.02 **7.12**	3.17 **5.01**	2.78 **4.16**	2.54 **3.68**	2.38 **3.37**	2.27 **3.15**	2.18 **2.98**	2.11 **2.85**	2.05 **2.75**	2.00 **2.66**	1.97 **2.59**	1.93 **2.53**
60	4.00 **7.08**	3.15 **4.98**	2.76 **4.13**	2.52 **3.65**	2.37 **3.34**	2.25 **3.12**	2.17 **2.95**	2.10 **2.82**	2.04 **2.72**	1.99 **2.63**	1.95 **2.56**	1.92 **2.50**
65	3.99 **7.04**	3.14 **4.95**	2.75 **4.10**	2.51 **3.62**	2.36 **3.31**	2.24 **3.09**	2.15 **2.93**	2.08 **2.79**	2.02 **2.70**	1.98 **2.61**	1.94 **2.54**	1.90 **2.47**
70	3.98 **7.01**	3.13 **4.92**	2.74 **4.08**	2.50 **3.60**	2.35 **3.29**	2.23 **3.07**	2.14 **2.91**	2.07 **2.77**	2.01 **2.67**	1.97 **2.59**	1.93 **2.51**	1.89 **2.45**
80	3.96 **6.96**	3.11 **4.88**	2.72 **4.04**	2.48 **3.56**	2.33 **3.25**	2.21 **3.04**	2.12 **2.87**	2.05 **2.74**	1.99 **2.64**	1.95 **2.55**	1.91 **2.48**	1.88 **2.41**
100	3.94 **6.90**	3.09 **4.82**	2.70 **3.98**	2.46 **3.51**	2.30 **3.20**	2.19 **2.99**	2.10 **2.82**	2.03 **2.69**	1.97 **2.59**	1.92 **2.51**	1.88 **2.43**	1.85 **2.36**
125	3.92 **6.84**	3.07 **4.78**	2.68 **3.94**	2.44 **3.47**	2.29 **3.17**	2.17 **2.95**	2.08 **2.79**	2.01 **2.65**	1.95 **2.56**	1.90 **2.47**	1.86 **2.40**	1.83 **2.33**
150	3.91 **6.81**	3.06 **4.75**	2.67 **3.91**	2.43 **3.44**	2.27 **3.14**	2.16 **2.92**	2.07 **2.76**	2.00 **2.62**	1.94 **2.53**	1.89 **2.44**	1.85 **2.37**	1.82 **2.30**
200	3.89 **6.76**	3.04 **4.71**	2.65 **3.88**	2.41 **3.41**	2.26 **3.11**	2.14 **2.90**	2.05 **2.73**	1.98 **2.60**	1.92 **2.50**	1.87 **2.41**	1.83 **2.34**	1.80 **2.28**
400	3.86 **6.70**	3.02 **4.66**	2.62 **3.83**	2.39 **3.36**	2.23 **3.06**	2.12 **2.85**	2.03 **2.69**	1.96 **2.55**	1.90 **2.46**	1.85 **2.37**	1.81 **2.29**	1.78 **2.23**
1,000	3.85 **6.66**	3.00 **4.62**	2.61 **3.80**	2.38 **3.34**	2.22 **3.04**	2.10 **2.82**	2.02 **2.66**	1.95 **2.53**	1.89 **2.43**	1.84 **2.34**	1.80 **2.26**	1.76 **2.20**
∞	3.84 **6.64**	2.99 **4.60**	2.60 **3.78**	2.37 **3.32**	2.21 **3.02**	2.09 **2.80**	2.01 **2.64**	1.94 **2.51**	1.88 **2.41**	1.83 **2.32**	1.79 **2.24**	1.75 **2.18**

F பரவலுக்கான 5%, 1%, மதிப்புகளைத்தரும் அட்டவணை*

(தொடர்ச்சி)

f_1 வரையற்ற பாகைகள் (பெரிய வர்க்கச் சராசரிக்கு)

14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	f_2
2.08 **2.83**	2.03 **2.74**	1.97 **2.63**	1.93 **2.55**	1.88 **2.47**	1.84 **2.38**	1.80 **2.33**	1.76 **2.25**	1.74 **2.21**	1.71 **2.16**	1.68 **2.12**	1.67 **2.10**	27
2.06 **2.80**	2.02 **2.71**	1.96 **2.60**	1.91 **2.52**	1.87 **2.44**	1.81 **2.35**	1.78 **2.30**	1.75 **2.22**	1.72 **2.18**	1.69 **2.13**	1.67 **2.09**	1.65 **2.06**	28
2.05 **2.77**	2.00 **2.68**	1.94 **2.57**	1.90 **2.49**	1.85 **2.41**	1.80 **2.32**	1.77 **2.27**	1.73 **2.19**	1.71 **2.15**	1.68 **2.10**	1.65 **2.06**	1.64 **2.03**	29
2.04 **2.74**	1.99 **2.66**	1.93 **2.55**	1.89 **2.47**	1.84 **2.38**	1.79 **2.29**	1.76 **2.24**	1.72 **2.16**	1.69 **2.13**	1.66 **2.07**	1.64 **2.03**	1.62 **2.01**	30
2.02 **2.70**	1.97 **2.62**	1.91 **2.51**	1.86 **2.42**	1.82 **2.34**	1.76 **2.25**	1.74 **2.20**	1.69 **2.12**	1.67 **2.08**	1.64 **2.02**	1.61 **1.98**	1.59 **1.96**	32
2.00 **2.66**	1.95 **2.58**	1.89 **2.47**	1.84 **2.38**	1.80 **2.30**	1.74 **2.21**	1.71 **2.15**	1.67 **2.08**	1.64 **2.04**	1.61 **1.98**	1.59 **1.94**	1.57 **1.91**	34
1.98 **2.62**	1.93 **2.54**	1.87 **2.43**	1.82 **2.35**	1.78 **2.26**	1.72 **2.17**	1.69 **2.12**	1.65 **2.04**	1.62 **2.00**	1.59 **1.94**	1.56 **1.90**	1.55 **1.87**	36
1.96 **2.59**	1.92 **2.51**	1.85 **2.40**	1.80 **2.32**	1.76 **2.22**	1.71 **2.14**	1.67 **2.08**	1.63 **2.00**	1.60 **1.97**	1.57 **1.90**	1.54 **1.86**	1.53 **1.84**	38
1.95 **2.56**	1.90 **2.49**	1.84 **2.37**	1.79 **2.29**	1.74 **2.20**	1.69 **2.11**	1.66 **2.05**	1.61 **1.97**	1.59 **1.94**	1.55 **1.88**	1.53 **1.84**	1.51 **1.81**	40
1.94 **2.54**	1.89 **2.46**	1.82 **2.35**	1.78 **2.26**	1.73 **2.17**	1.68 **2.08**	1.64 **2.02**	1.60 **1.94**	1.57 **1.91**	1.54 **1.85**	1.51 **1.80**	1.49 **1.78**	42
1.92 **2.52**	1.88 **2.44**	1.81 **2.32**	1.76 **2.24**	1.72 **2.15**	1.66 **2.06**	1.63 **2.00**	1.58 **1.92**	1.56 **1.88**	1.52 **1.82**	1.50 **1.78**	1.48 **1.75**	44
1.91 **2.50**	1.87 **2.42**	1.80 **2.30**	1.75 **2.22**	1.71 **2.13**	1.65 **2.04**	1.62 **1.98**	1.57 **1.90**	1.54 **1.86**	1.51 **1.80**	1.48 **1.76**	1.46 **1.72**	46
1.90 **2.48**	1.86 **2.40**	1.79 **2.28**	1.74 **2.20**	1.70 **2.11**	1.64 **2.02**	1.61 **1.96**	1.56 **1.88**	1.53 **1.84**	1.50 **1.78**	1.47 **1.73**	1.45 **1.70**	48
1.90 **2.46**	1.85 **2.39**	1.78 **2.26**	1.74 **2.18**	1.69 **2.10**	1.63 **2.00**	1.60 **1.94**	1.55 **1.86**	1.52 **1.82**	1.48 **1.76**	1.46 **1.71**	1.44 **1.68**	50
1.88 **2.43**	1.83 **2.35**	1.76 **2.23**	1.72 **2.15**	1.67 **2.06**	1.61 **1.96**	1.58 **1.90**	1.52 **1.82**	1.50 **1.78**	1.46 **1.71**	1.43 **1.66**	1.41 **1.64**	55
1.86 **2.40**	1.81 **2.32**	1.75 **2.20**	1.70 **2.12**	1.65 **2.03**	1.59 **1.93**	1.56 **1.87**	1.50 **1.79**	1.48 **1.74**	1.44 **1.68**	1.41 **1.63**	1.39 **1.60**	60
1.85 **2.37**	1.80 **2.30**	1.73 **2.18**	1.68 **2.09**	1.63 **2.00**	1.57 **1.90**	1.54 **1.84**	1.49 **1.76**	1.46 **1.71**	1.42 **1.64**	1.39 **1.60**	1.37 **1.56**	65
1.84 **2.35**	1.79 **2.28**	1.72 **2.15**	1.67 **2.07**	1.62 **1.98**	1.56 **1.88**	1.53 **1.82**	1.47 **1.74**	1.45 **1.69**	1.40 **1.62**	1.37 **1.56**	1.35 **1.53**	70
1.82 **2.32**	1.77 **2.24**	1.70 **2.11**	1.65 **2.03**	1.60 **1.94**	1.54 **1.84**	1.51 **1.78**	1.45 **1.70**	1.42 **1.65**	1.38 **1.57**	1.35 **1.52**	1.32 **1.49**	80
1.79 **2.26**	1.75 **2.19**	1.68 **2.06**	1.63 **1.98**	1.57 **1.89**	1.51 **1.79**	1.48 **1.73**	1.42 **1.64**	1.39 **1.59**	1.34 **1.51**	1.30 **1.46**	1.28 **1.43**	100
1.77 **2.23**	1.72 **2.15**	1.65 **2.03**	1.60 **1.94**	1.55 **1.85**	1.49 **1.75**	1.45 **1.68**	1.39 **1.59**	1.36 **1.54**	1.31 **1.46**	1.27 **1.40**	1.25 **1.37**	125
1.76 **2.20**	1.71 **2.12**	1.64 **2.00**	1.59 **1.91**	1.54 **1.83**	1.47 **1.72**	1.44 **1.66**	1.37 **1.56**	1.34 **1.51**	1.29 **1.43**	1.25 **1.37**	1.22 **1.33**	150
1.74 **2.17**	1.69 **2.09**	1.62 **1.97**	1.57 **1.88**	1.52 **1.79**	1.45 **1.69**	1.42 **1.62**	1.35 **1.53**	1.32 **1.48**	1.26 **1.39**	1.22 **1.33**	1.19 **1.28**	200
1.72 **2.12**	1.67 **2.04**	1.60 **1.92**	1.54 **1.84**	1.49 **1.74**	1.42 **1.64**	1.38 **1.57**	1.32 **1.47**	1.28 **1.42**	1.22 **1.32**	1.16 **1.24**	1.13 **1.19**	400
1.70 **2.09**	1.65 **2.01**	1.58 **1.89**	1.53 **1.81**	1.47 **1.71**	1.41 **1.61**	1.36 **1.54**	1.30 **1.44**	1.26 **1.38**	1.19 **1.28**	1.13 **1.19**	1.08 **1.11**	1,000
1.69 **2.07**	1.64 **1.99**	1.57 **1.87**	1.52 **1.79**	1.46 **1.69**	1.40 **1.59**	1.35 **1.52**	1.28 **1.41**	1.24 **1.36**	1.17 **1.25**	1.11 **1.15**	1.00 **1.00**	∞

REFERENCES

1. GEORGE W. SNEDECOR and WILLIAM G. COCHRAN ... Statistical Methods. Sixth Edition. Oxford & IBH Publishing Co. Calcutta

2. WALTER T. FEDERER ... Experimental Design. Theory and Application. Oxford & IBH Publishing Co. Calcutta.

3. WILLIAM G. COCHRAN and GERTRUDE M. COX. ... Experimental Designs. Second Edition. Asia Publishing House. Bombay.

4. OSCAR KEMPTHORNE ... The Design and Analysis of Experiments. John Wiley & Sons, Inc. New York.

5. R. L. ANDERSON and T.A. BANCROFT. ... Statistical Theory in Research Mc Graw Hill Book Company, New York.

6. WILFRID J. DIXON ... and FRANK J. MASSEY, Jr. — Introduction to Statistical Analysis—Third Edition. International Student Edition. Kogakusha Company, Ltd. Tokyo.

7. CYRIL H GOULDEN. ... — Methods of Statistical Analysis Asia Publishing House, Bombay.

8. ALBERT H. BOWKER ... and GERALD J. LIEBERMAN — Engineering Statistics. Prentice - Hall, Inc. Englewood Ciffs, N. J.

9. J. N. KAPUR and ... H. C. SAXENA. — Mathematical Statistics. S. Chand & Co. Delhi.

10. R. A. FISHER. ... — Design of Experiments. Oliver. & Boyd, Ltd., Edidnburgh and London.

கலைச்சொற்கள்

(ஆங்கிலம்-தமிழ்)

Additive — கூட்டப்படக்கூடியவை

Adjusted — சரிசெய்யப்பட்ட

Analysis of Covariance — உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு

Analysis of variance — பரவற்படி ஆய்வு

Analysis of covariance table — உடன் மாறுபாட்டு ஆய்வு அட்டவணை

Analysis of variance table — பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

Bias — ஒரு புறச் சாய்வு

Calculations — கணக்கீடுகள்

Categories — பண்புக் கூறுகள்

Characteristics — தனிச் சிறப்புப் பண்புகள்

Column — நிரல்

Combinations — சேர்வுகள்

,, treatment — நடத்து முறை சேர்வுகள்.

Comparisons — ஒப்புமைகள்

,, treatment — நடத்துமுறை ஒப்புமைகள்

Components of variation — மாறுபாட்டுப் பகுதிகள்

Concept — கருத்துப் படிவம்

Concomitant variable — உடனியங்குகின்ற மாறி

Confidence Interval — நம்பிக்கை இடைவெளி
Confidence probabilty — நம்பிக்கை நிகழ்திறம்
Conscious bias — உணர்வு நிலையில் ஒருபுறச் சாய்வு
Correction factor — சரியீட்டளவு
Covariance — உடன் மாறுபாடு

Density function — அடர்த்திச் சார்பு
Design — திட்டம்
,, Completely Randomised — முழுமையும் சமவாய்ப்புத் திட்டம்
,, Ramdomised Block — சமவாய்ப்புக் கட்டு திட்ட அமைப்பு
,, Latin square — லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டம்

Effects — விளைவுகள்
,, Main — முதன்மையான விளைவுகள்.
,, Linear — ஒரு படி விளைவுகள்
,, Quadratic — இரு படி விளைவுகள்
,, Fixed — நிலையான விளைவுகள்
,, Random — ராண்டம் விளைவுகள்
,, Mixed — கலப்பு விளைவுகள்
Empirical justification — அனுபவரீதியான மெய்ப்பிப்பு
Error — பிழை
,, Type I — முதல்வகைப் பிழை
,, Type II — இரண்டாவது வகைப் பிழை
,, Experimental — செய்முறைப் பிழை; பரிசோதனைப் பிழை

Estimate — மதிப்பு, மதிப்பீடு
,, Best — மிகச் சிறந்த மதிப்பீடு
,, Consistent — பொருத்தமுடைய மதிப்பீடு
,, Efficient — பயில் திறனுடைய மதிப்பீடு

,, Sufficient	—	தேவைக்குப் போதுமான மதிப்பீடு
,, Point	—	நேர் இலக்கு மதிப்பீடு
,, Interval	—	இடை வெளி மதிப்பீடு
,, Pooled	—	ஒன்று சேர்க்கப்பட்ட மதிப்பீடு
Experimental material	—	செய்முறைச் சாதனம்; பரிசோதனைக் கூறு
Experimenal unit	—	செய்முறை அடிப்படைக் கூறு; பரிசோதனை அடிப் படைக் கூறு
Factorial Experiment	—	பகுதித்திருப்பச் சோதனைகள்
Feeding experiments	—	ஊட்டச் சோதனைகள்
Flexibility.	—	இசைந்து கொடுக்குந் தன்மை
Grand Mean	—	பொதுக் கூட்டிடை
Grand Total	—	மொத்தக் கூட்டுத் தொகை
Hypothesis	—	எடுகோள்
,, Null	—	சூனிய எடுகோள்
,, Alternative	—	மாற்றெதிர் எடுகோள்
,, Accept the	—	எடுகோளை ஒப்புக்கொள்
,, Reject the	—	எடுகோளை நிராகரி, தள்ளு
Individuals	—	தனித்த மதிப்புகள்
,, Distribution of	—	தனித்த மதிப்புகளின் பரவல்
Ingredients	—	கலவைக் கூறுகள்
Interpretations	—	விளக்கங்கள்
Iterative method	—	தொடர்முறைக் கணிப்பு
Least Square Method	—	மீச்சிறுபடி முறை
Least Significant Difference LSD test, the	—	மீச்சிறு பொருளுடை வேறு பாட்டுச் சோதனை
LSD	—	மீ. பொ. வே

Linear function — ஒருபடிச் சார்பு
Linear contrast — ஒருபடி வேறுபாட்டு முனைப்பு
Local control — நிகழ்விடக் கட்டுப்பாடு
Loss of information — தகவல் இழப்பு
Magnitude — பரிமாணம்
Missing values — தவறிப் போன மதிப்புகள்
Model — உருப்படிவம்
,, Mathemetical — கணக்கியல் சார்ந்த உருப்படிவம்
,, Fixed effects — நிலையான விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவம்
,, Random effects — ராண்டம் விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவம்
,, Mixed effects — கலப்பு ஈரின விளைவுகள் கொண்ட உருப்படிவம்
Mutually Orthogonal — ஒன்றையொன்று சார்ந்திராத
Objective — மனத்திற்குப் புறம்பான
Operation — செயல்வகை
Permutations — வரிசை மாற்றங்கள்
Practical limitations — நடை முறையில் உள்ள கட்டுப் பாடுகள்
Randomisation — ராண்டம் முறைப் படுத்துதல்
Relative amount of information— சார்புச் செய்தியின் அளவு
Relative efficiency — சார்புப் பயில் திறன்
Relative frequencies — சார்பு அலைவு எண்கள்
Replications — திரும்பச் செய்தவை, ரெப்லிகேசன்கள்
Restricted randomisation — கட்டுப் படுத்தப்பட்ட ராண் டம் முறைப் படுத்துதல்
Results — விளை பயன்கள்
Scope — செயற் பரப்பு
Sensitivity — நுட்பப் பண்பு
Serious bias — வினைமையுடைய ஒருபுறச் சாய்வு

Source of Variation	—	மாறுபாட்டின் மூலம்
Standard Square	—	ஆதாரச் சதுரம்
Sum of Squares	—	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
,, Mean	—	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி
,, Total	—	மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
,, With in Samples	—	மாதிரிகளகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
,, Between Samples	—	மாதிரிகளிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
,, Treatment	—	நடத்துமுறை வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை
,, Block	—	பிளாக் வர்க்கங்களின்கூட்டுத் தொகை
,, Row	—	வரிசை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
,, Column	—	நிரல் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
,, Within Combinations	—	சேர்வுகளகத்தே வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை
,, Deviations	—	விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின்கூட்டுத் தொகை
Sum of Squares, Error	—	பிழை வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
,, , Adjusted	—	சரி செய்யப்பட்ட வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை
Supplementary data	—	துணை விவரங்கள்
Transformation	—	உருவமாற்றம்
,, Sine inverse (Arcsin)	—	நேர்மாறு நெடுக்கை உருவ மாற்றம்
Treatment	—	நடத்து முறை
unbiased	—	பிறழ்ச்சியற்ற